Mercredi 17 décembre 2008.

Concours blanc n° 1 – Épreuve n° 2

Épreuve type EDHEC

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté, la précision et la concision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.

L'usage de tout document et de tout matériel électronique est interdit. Notamment, les téléphones portables doivent être éteints *et* rangés.

Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre

Exercice 1 – (EDHEC 2005) *Dans cet exercice, n est un entier supérieur ou égal à 2. On désigne par I la matrice unité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.*

1. *On note* tr *l'application linéaire qui à toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ associe sa trace, c'est-à-dire la somme de ses éléments diagonaux.*
   (a) Montrer que $\mathrm{Im}(\mathrm{tr}) = \mathbb{R}$.
   (b) En déduire la dimension de $\mathrm{Ker}(\mathrm{tr})$.
   (c) Établir que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathrm{Ker}(\mathrm{tr}) \oplus \mathrm{Vect}(I)$.
2. Soit f l'application qui, à toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ associe
$$f(M) = M + \mathrm{tr}(M)I.$$
   (a) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   (b) Utiliser la première question pour déterminer les valeurs propres de f. En déduire que f est un automorphisme diagonalisable de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
3. Soit g l'application qui, à toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ associe
$$g(M) = M + \mathrm{tr}(M)J$$
   où J désigne une matrice non nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, dont la trace est nulle.
   On admet que g est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   (a) Établir que le polynôme $X^2 - 2X + 1$ est un polynôme annulateur de g.
   (b) Montrer que 1 est la seule valeur propre de g.
   (c) L'endomorphisme g est-il diagonalisable ?

Exercice 2 – (d'après EDHEC 2004)

Quelques questions ont été rajoutées par rapport au sujet original. Les ajouts on été indiqués dans le sujet.

1. On pose, lorsque c'est possible, $f(x) = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t+t^{x+1}}$. Montrer que le domaine de définition de la fonction f est $]0,+\infty[$.
2. Montrer que f est décroissante sur $]0,+\infty[$.
3. (Question ajoutée) Calculer $f(1)$.
4. (a) Justifier l'existence de la quantité $g(x)$ définie sur $]0,+\infty[$ par
$$g(x) = \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t(1+t^x)}.$$
   (b) Pour tout x de $]0,+\infty[$ et pour tout t de $[1,+\infty[$, simplifier $\dfrac{1}{t} - \dfrac{t^{x-1}}{1+t^x}$, puis établir que :
$$\forall x \in]0,+\infty[, \quad g(x) = \frac{\ln 2}{x}.$$
   (c) En déduire que :
$$\forall x \in]0,+\infty[, \quad 0 \leqslant f(x) \leqslant \frac{\ln 2}{x},$$
   puis déterminer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.
5. (a) Montrer que :
$$\forall x \in]0,+\infty[, \quad 0 \leqslant \frac{\ln 2}{x} - f(x) \leqslant \frac{1}{2x+1}.$$
   (b) En déduire la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers 0^+, ainsi qu'un équivalent de $f(x)$ lorsque x est au voisinage de 0^+.
6. Dresser le tableau de variations de f.
7. (Question ajoutée) Soit, pour tout $t \in [1,+\infty[$, la fonction g_t définie par :
$$\forall x \in]0,+\infty[, \quad g_t(x) = \frac{1}{1+t+t^{x+1}}.$$
   (a) Montrer que pour tout t, g_t est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[1,+\infty[$, et déterminer g_t' et g_t''.
   (b) Soit $x > 0$, et $h \in \mathbb{R}$ tel que $|h| \leqslant \frac{x}{2}$. Montrer que pour tout $t \in]0,+\infty[$, et tout y dans $[x-|h|, x+|h|]$, on a :
$$|g_t''(y)| \leqslant \frac{\ln^2(t)}{1+t+t^{\frac{x}{2}+1}}.$$
   (c) En déduire que
$$\left| \frac{g_t(x+h) - g_t(x)}{h} - g_t'(x) \right| \leqslant \frac{h \ln^2 t}{2(1+t+t^{\frac{x}{2}+1})}.$$
   (d) En étudiant la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln^2 t}{1+t+t^{\frac{x}{2}+1}}\,\mathrm{d}t$, en déduire que f est dérivable sur $]0,+\infty[$, et que
$$\forall x \in]0,+\infty[, \quad f'(x) = \int_1^{+\infty} g_t'(x)\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 3 – (EDHEC 2002)

1. (a) Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 (1 - \ln t)\, \mathrm{d}t$ converge et donner sa valeur.

   (b) Montrer que $\displaystyle\int_0^x \frac{1 - \ln t}{2 + t^2}\, \mathrm{d}t$ converge pour tout réel x strictement positif.

   On pose alors : $\forall x > 0,\quad F(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{1 - \ln t}{2 + t^2}\, \mathrm{d}t$ *et* $F(0) = 0$.

   (a) Montrer que F est continue en 0

   (b) Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et donner ses variations (la limite de F en $+\infty$ n'est pas demandée)

3. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par la donnée de son premier terme $u_0 = 1$, et la relation de récurrence, valable pour tout n de $\mathbb{N}$: $u_{n+1} = F(u_n)$.

   (a) Établir que, pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n \in [0, 1]$.

   (b) Montrer que $u_0 \geqslant u_1$, puis déterminer par récurrence les variations de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

   (c) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

4. Pour tout x de $[0, 1]$, on pose $g(x) = F(x) - x$.

   (a) Montrer qu'il existe un unique réel β de $]0, 1]$ tel que $g'(\beta) = 0$, puis donner les variations de g.

   (b) En déduire l'existence d'un unique réel α, élément de $]\beta, 1]$, tel que $g(\alpha) = 0$

5. (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\quad u_n \geqslant \alpha$

   (b) En déduire que : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = \alpha$.

Problème 1 – *On considère deux jetons J_1 et J_2 équilibrés (c'est-à-dire tels que chaque face a une chance sur deux d'apparaître au cours d'un lancer). Le jeton J_1 possède une face numérotée 0 et une face numérotée 1. Le jeton J_2 possède deux faces numérotées 1. Un joueur choisit au hasard un jeton, puis effectue une série de lancers avec ce jeton. On note E l'événement :*

E : *« le jeton J_1 est choisi pour le jeu »*

et, pour tout entier naturel k non nul, U_k l'événement :

U_k : *« le k-ième lancer fait apparaître une face numérotée 1 ».*

Partie I – Étude de quelques variables aléatoires liées à cette épreuve

1. (a) Déterminer la probabilité que le joueur obtienne n fois ($n \in \mathbb{N}^*$) une face portant le numéro 1 lors des n premiers lancers.

   (b) Dans cette question, on suppose que le joueur a obtenu n fois ($n \in \mathbb{N}^*$) une face portant le numéro 1 lors des n premiers lancers. Quelle est la probabilité qu'il ait joué avec le jeton J_1 ? Quelle est la limite de cette probabilité lorsque n tend vers l'infini ? Interpréter ce résultat.

Dans la suite, on considère la variable aléatoire X égale au rang d'apparition de la première face portant le numéro 0, et on pose $X = 0$ si la face portant le numéro 0 n'apparaît jamais.
On considère également la variable aléatoire Y égale au rang d'apparition de la première face portant le numéro 1, et on pose $Y = 0$ si la face portant le numéro 1 n'apparaît jamais.
On suppose ces variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

2. (a) Calculer, pour tout entier naturel n non nul, la probabilité $P(X = n)$.

   (b) En déduire que $P(X = 0) = \frac{1}{2}$. Ce résultat était-il prévisible ?

   (c) Montrer que X a une espérance, puis déterminer $E(X)$.

(d) Montrer que $X(X-1)$ a une espérance, la déterminer, puis vérifier que $V(X)=2$.

3. (a) Calculer, pour tout entier naturel n non nul, la probabilité $P(Y=n)$.

   (b) En déduire que $P(Y=0)=0$.

   (c) Montrer que Y a une espérance, puis déterminer $E(Y)$.

   (d) Montrer que $Y(Y-1)$ a une espérance, la déterminer, puis vérifier que $V(Y)=\frac{5}{4}$.

4. *On définit sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ la variable aléatoire S par :*

$$\forall \omega \in \Omega, \quad S(\omega) = \max(X(\omega), Y(\omega)).$$

   (a) Déterminer $S(\Omega)$.

   (b) Montrer que $P(S=1)=P(X=0)=\frac{1}{2}$.

   (c) Pour tout n entier supérieur ou égal à 2, comparer d'une part $[X=n]$ et $[Y<n]$, et d'autre part $[Y=n]$ et $[X<n]$, puis en déduire que :

$$[S=n] = [X=n] \cup [Y=n].$$

   (d) Reconnaître alors la loi de S et préciser son espérance et sa variance.

5. *On définit sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ la variable aléatoire I par :*

$$\forall \omega \in \Omega, \quad I(\omega) = \min(X(\omega), Y(\omega)).$$

   (a) Montrer que I est une variable de Bernoulli.

   (b) Déterminer $P(I=0)$, puis donner la loi de I, ainsi que son espérance et sa variance.

Partie II – Simulation des variables X et Y

On rappelle que `random(2)` *renvoie au hasard un entier de* $\{0,1\}$.

1. On considère le programme suivant :

```
Program Edhec2005;
Var jeton, lancer, X:integer;
Begin
  Randomize;
  X:=0;
  jeton:=random(2)+1;
  if jeton=1 then
    begin
      repeat
        X:=X+1;
        lancer:= random(2);
      until
        lancer=0;
    end;
  writeln(X);
end.
```

   (a) Expliquer le fonctionnement de ce programme et déterminer quel est le contenu de la variable affichée à la fin.

   (b) Est-on certain que le nombre de passages dans la boucle « `repeat ... until` » est fini ?

2. Écrire un programme Pascal qui donne la valeur de la variable Y.