Concours blanc 2 – Épreuve 1
EM Lyon 2007

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté, la précision et la concision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.

L'usage de tout document et de tout matériel électronique est interdit. Notamment, les téléphones portables doivent être éteints *et* rangés.

Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre

Problème 1 – *On considère l'application*

$$f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1+x)}{x} & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Partie I – Étude de l'application f

1. Montrer que f est continue sur $[0,+\infty[$.
2. *On considère l'application*

$$A : [0,+\infty[\to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto A(x) = \frac{x}{1+x} - \ln(1+x).$$

   (a) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ et que pour tout $x \in]0,+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{A(x)}{x^2}$.

   (b) Montrer que f' admet $-\frac{1}{2}$ comme limite en 0 à droite.

   (c) Démontrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,+\infty[$ et préciser $f'(0)$.

   (d) Dresser le tableau de variation de A.
   En déduire que f est strictement décroissante sur $[0,+\infty[$.

   (e) Déterminer la limite de f en $+\infty$.
3. *On considère l'application*

$$B : [0,+\infty[\to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto B(x) = -\frac{3x^2+2x}{(1+x)^2} + 2\ln(1+x).$$

   (a) Montrer que f est deux fois dérivable sur $]0,+\infty[$, et que, pour tout $x \in]0,+\infty[$,

$$f''(x) = \frac{B(x)}{x^3}.$$

   (b) Dresser le tableau de variation de B.
   En déduire que f est convexe sur $]0,+\infty[$.
4. Tracer l'allure de la courbe représentative de f.

Partie II – Un développement en série

1. Montrer, pour tout $N \in \mathbb{N}$ et tout $t \in [0,1]$: $\dfrac{1}{1+t} = \displaystyle\sum_{k=0}^{N} (-1)^k t^k + \dfrac{(-1)^{N+1} t^{N+1}}{1+t}$.

2. En déduire, pour tout $N \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0,1]$: $\ln(1+x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{N} \dfrac{(-1)^k x^{k+1}}{k+1} + J_N(x)$,

   où on a noté $J_N(x) = \displaystyle\int_0^x \dfrac{(-1)^{N+1} t^{N+1}}{1+t}\,\mathrm{d}t$.

3. Établir, pour tout $N \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0,1]$: $|J_N(x)| \leqslant \dfrac{x^{N+2}}{N+2}$.

4. En déduire que, pour tout $x \in [0,1]$, la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \dfrac{(-1)^{n-1} x^n}{n}$ converge et que :

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}.$$

5. (Question ajoutée) Écrire une fonction en Pascal prenant en paramètre deux réels x et e, et calculant, si $x \in [0,1]$, une valeur approchée de $\ln(1+x)$ à e près (sans utiliser la fonction ln). On pourra, pour majorer l'erreur, remarquer que la série de la question précédente est alternée...

Partie III – Égalité d'une intégrale et d'une somme de série

1. Montrer, en utilisant le résultat de II-3, pour tout $N \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0,1]$:

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k x^k}{k+1} \right| \leqslant \frac{x^{N+1}}{N+2}.$$

2. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ converge, et que : $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n^2}$.

3. Montrer, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \displaystyle\sum_{n=1}^{2N+1} \frac{1}{n^2} & = & \displaystyle\sum_{p=0}^{N} \frac{1}{(2p+1)^2} + \sum_{p=1}^{N} \frac{1}{4p^2} \\ \displaystyle\sum_{n=1}^{2N+1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} & = & \displaystyle\sum_{p=0}^{N} \frac{1}{(2p+1)^2} - \sum_{p=1}^{N} \frac{1}{4p^2}. \end{array} \right.$$

4. On admet que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2} = \dfrac{\pi^2}{6}$. Montrer : $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{\pi^2}{12}$.

Partie IV – Recherche d'extremum pour une fonction réelle de deux variables réelles

On note $\quad F :]0,+\infty[\to \mathbb{R}, \quad x \mapsto F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t,$

et $\quad G :]0,+\infty[^2 \to \mathbb{R}, \quad (x,y) \mapsto G(x,y) = F(xy) - F(x) - F(y).$

1. Montrer que G est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0,+\infty[^2$.
   Exprimer, pour tout $(x,y) \in]0,+\infty[^2$, les dérivées partielles premières et secondes de G en (x,y) en fonction de x, y, $f(x)$, $f(y)$, $f(xy)$, $f'(x)$, $f'(y)$, $f'(xy)$.

2. Établir que G admet $(1,1)$ comme unique point critique.

3. Est-ce que G admet un extremum local ?

Problème 2 –

On note n un nombre entier fixé supérieur ou égal à 2, E le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ constitué des polynômes de degré inférieur ou égal à n, et $\mathcal{B} = (1, X, \dots, X^n)$ la base canonique de E.

Partie I – Étude d'un endomorphisme de E

1. Montrer que pour tout polynôme P de E, le polynôme $((X^2-1)P)''$ est élément de E, où $((X^2-1)P)''$ désigne le polynôme dérivée seconde de $(X^2-1)P$.

On note $\Phi : E \to E$ l'application qui, à tout polynôme P de E, associe $\Phi(P) = ((X^2-1)P)''$.

2. Vérifier : $\Phi(1) = 2$, $\Phi(X) = 6X$.
3. Montrer que Φ est un endomorphisme de E.
4. Calculer $\Phi(X^k)$ pour tout $k \in [\![0, n]\!]$ et écrire la matrice A de Φ dans la base $\mathcal{B}$.
5. (a) Montrer que Φ admet $n+1$ valeurs propres deux à deux distinctes que l'on notera $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n$, avec $\lambda_0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_n$.
   (b) Est-ce que Φ est bijectif ?
   (c) Montrer que Φ est diagonalisable, et déterminer, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, la dimension du sous-espace propre de Φ associé à λ_k.
6. Soient $k \in [\![0, n]\!]$ et P un vecteur propre de Φ associé à la valeur propre λ_k.
   (a) Montrer que le degré du polynôme P est égal à k.
   (b) Montrer que le polynôme Q défini par $Q(X) = P(-X)$ est un vecteur propre de Φ associé à λ_k.
7. En déduire qu'il existe une unique base $(P_0, P_1, \dots, P_n)$ de E constituée de vecteurs propres de Φ telle que, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, P_k est un polynôme de degré k, de coefficient dominant égal à 1, et vérifiant $P_k(-X) = (-1)^k P_k(X)$.
   Que peut-on en déduire sur la parité de P_k ?
8. Calculer P_0, P_1, P_2, P_3.

Partie II – Un produit scalaire sur E

1. Montrer que l'application : $(P, Q) \mapsto (P \mid Q) = \displaystyle\int_{-1}^{1} (1-x^2)P(x)Q(x)\,\mathrm{d}x$ est un produit scalaire sur E.

On munit dorénavant E de ce produit scalaire, noté $(\cdot \mid \cdot)$.

2. (Question ajoutée) Déterminer la famille orthonormale (f_0, f_1, f_2) obtenue par le procédé d'orthonormalisation de Schmidt à partir de la famille $(1, X, X^2)$.
3. (a) À l'aide d'intégrations par parties, établir que Φ est un endomorphisme symétrique de E.
   (b) Montrer que la base $(P_0, P_1, \dots, P_n)$ de E obtenue à la question I-7 est orthogonale.

Soit $j \in [\![1, n]\!]$

4. (a) Montrer que pour tout polynôme S de degré inférieur ou égal à $j-1$, on a : $(S \mid P_j) = 0$.
   (b) En considérant $(1 \mid P_j)$, montrer que P_j ne garde pas un signe constant sur l'intervalle $]-1, 1[$.
   (c) En déduire que P_j admet au moins, dans l'intervalle $]-1, 1[$, une racine d'ordre de multiplicité impair.
5. *On note $\{x_1, \dots, x_m\}$ l'ensemble des racines d'ordre de multiplicité impair de P_j appartenant à l'intervalle $]-1, 1[$, et $S_m = (X-x_1)(X-x_2)\dots(X-x_m)$.*
   (a) Justifier $m \leqslant j$.
   (b) Montrer que le polynôme $S_m P_j$ (produit des polynômes S_m et P_j) garde un signe constant sur l'intervalle $]-1, 1[$.
   (c) En considérant $(S_m \mid P_j)$, montrer que $m = j$.
   (d) En déduire que P_j admet j racines simples réelles, toutes situées dans l'intervalle $]-1, 1[$.