Concours blanc n° 2 – Épreuve n° 2
Ecricome 2003

Les élèves ont le choix entre cette épreuve et l'épreuve de l'ESSEC ; ils indiqueront clairement en entête de copie quel sujet ils ont choisi

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté, la précision et la concision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.

L'usage de tout document et de tout matériel électronique est interdit. Notamment, les téléphones portables doivent être éteints *et* rangés.

Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre

Exercice 1 – *On considère la suite de nombres réels $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la relation de récurrence :*

$$u_0 = a,\ a \in \mathbb{R}_+^*, \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*,\quad u_{n+1} = u_n + u_n^2.$$

Partie I – Convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

1. Montrer que cette suite est strictement positive et monotone.
2. Montrer que cette suite diverge vers l'infini.

Partie II – Comportement asymptotique de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

On définit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $v_n = \dfrac{1}{2^n}\ln u_n$.

1. Prouver que pour tout entier n de $\mathbb{N}$: $v_{n+1} - v_n = \dfrac{1}{2^{n+1}}\ln\left(1 + \dfrac{1}{u_n}\right)$.
   En déduire que quels que soient les entiers naturels n et p :
   $$0 < v_{n+p+1} - v_{n+p} \leqslant \frac{1}{2^{n+p+1}}\ln\left(1 + \frac{1}{u_n}\right).$$
2. En déduire que quels que soient les entiers naturels k et n :
   $$0 < v_{n+k+1} - v_n \leqslant \frac{1}{2^n}\ln\left(1 + \frac{1}{u_n}\right).$$
3. Démontrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée, puis qu'elle converge vers une limite notée α.
4. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant \exp(\alpha \cdot 2^n)$.
   En passant à la limite pour n fixé dans l'encadrement II-2, montrer que :
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ \exp(\alpha \cdot 2^n) \leqslant u_n + 1.$$
   En déduire, lorsque n tend vers l'infini, l'équivalent suivant : $u_n \underset{+\infty}{\sim} \exp(\alpha 2^n)$.
5. On pose : $\beta_n = \exp(\alpha \cdot 2^n) - u_n$. Montrer que la suite $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et qu'elle vérifie la relation suivante :
   $$2\beta_n - 1 = (\beta_{n+1} + \beta_n^2 - \beta_n)\exp(-\alpha \cdot 2^n).$$
6. Prouver enfin que lorsque n tend vers l'infini : $u_n = -\dfrac{1}{2} + \exp(\alpha \cdot 2^n) + o(1)$.

Exercice 2 –
Dans cet exercice, n désigne un entier naturel non nul, et on adopte les notations suivantes :
- $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *: ensemble des matrices carrées d'ordre n, à coefficients réels.*
- $S_n(\mathbb{R})$ *: le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ des matrices symétriques.*
- $A_n(\mathbb{R})$ *: le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ des matrices antisymétriques.*

On rappelle qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est antisymétrique si ${}^tA = -A$, où ${}^tA$ est la matrice transposée de A.
On définit les applications tr *et φ par :*
pour toute matrice $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:

$$\operatorname{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i} \qquad \textit{et} \qquad \varphi(A,B) = \operatorname{tr}({}^tAB).$$

1. Montrer que tr est une application linéaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ qui vérifie :
$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \forall B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA).$$
2. Prouver que tr est surjective. Donner la dimension du noyau de tr.
3. Prouver que φ définit un produit scalaire dont la norme associée $\|\cdot\|$ vérifie
$$\forall A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\quad \|A\|^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}^2.$$
4. Établir que : $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ |\operatorname{tr}(A)| \leqslant \sqrt{n}\cdot\|A\|$.
5. Démontrer que $S_n(\mathbb{R})$ et $A_n(\mathbb{R})$ sont deux sous-espaces supplémentaires orthogonaux de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ pour φ.
6. Soit $M = (m_{i,j})$. En déduire que pour tout matrice $A = (a_{i,j})$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\displaystyle\min_{M\in S_n(\mathbb{R})} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(a_{i,j} - m_{i,j})^2$ existe et vaut $\displaystyle\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(a_{i,j} - a_{j,i})^2$.

Problème –
On rappelle que :
- *La fonction Γ est la fonction définie pour $x > 0$ par $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$.*
- *Si X suit une loi normale et si α est un réel non nul, alors αX suit également une loi normale.*

On admettra que $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.
On notera Φ la fonction de répartition d'une variable suivant une loi normale centrée réduite.

Partie I –
On considère la variable aléatoire $Y_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_i^2$, où $X_1, \ldots, X_n$ sont n variables aléatoires indépendantes suivant toutes une loi normale centrée réduite.

1. Déterminer la fonction de répartition F_{Y_1} de $Y_1 = X_1^2$ en fonction de Φ.
2. En déduire que Y_1 est une variable aléatoire qui suit une loi gamma dont on précisera les paramètres.
3. Justifier que Y_n suit une loi gamma de paramètres $\left(2, \frac{n}{2}\right)$.
4. Donner les valeurs de l'espérance $E(Y_n)$ et de la variance $V(Y_n)$ de Y_n.
5. On dit alors que Y_n suit une loi du chi-deux à n degrés de liberté, notée $\chi^2(n)$.
Soient G_n la fonction de répartition de Y_n et β un réel dans l'intervalle $]0,1[$. Montrer qu'il existe un unique réel t tel que $G_n(t) = \beta$. Ce réel est alors noté $\chi^2_\beta(n)$.

Dans la suite du problème, on considère une suite $(X_i)_{i\geqslant 1}$ de variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant une même loi normale $\mathcal{N}(m,\sigma)$. L'objet des questions suivantes est de déterminer une estimation ponctuelle (partie II) puis une estimation par intervalle de confiance (parties III et IV) de la variance σ^2.

Partie II – Estimation ponctuelle de σ^2

(Énoncé légèrement modifié pour coller à la terminologie du programme)

Pour n entier naturel non nul, on pose : $F_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_n$, $V_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(X_i - F_n)^2$.

1. (a) Montrer que $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un estimateur sans biais de m

   (b) Déterminer le risque quadratique de F_n et en déduire que F_n est un estimateur convergent.

2. Soit n un entier naturel non nul.

   (a) Démontrer que :
   $$V_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2,$$
   puis que :
   $$V_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - m)^2 - (F_n - m)^2.$$

   (b) Prouver que $E(V_n) = \dfrac{n-1}{n}\cdot\sigma^2$.

   (c) En déduire un estimateur sans biais de σ^2.

Partie III – Estimation par intervalle de confiance de σ^2, m étant connue.

Pour n entier supérieur à 2, on pose :
$$U_n = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i - m)^2 \qquad \textit{et} \qquad T_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - m)^2.$$

1. Justifier que U_n suit une loi du chi-deux à n degrés de liberté.

2. Soit $\alpha \in]0,1[$. Montrer l'égalité des événements :
   $$\left[\frac{nT_n}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)} \leqslant \sigma^2 \leqslant \frac{nT_n}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}(n)}}\right] \qquad \text{et} \qquad \left[\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n) \leqslant U_n \leqslant \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)\right].$$
   En déduire que la probabilité de l'événement $\left[\dfrac{nT_n}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)} \leqslant \sigma^2 \leqslant \dfrac{nT_n}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}(n)}}\right]$ est $1-\alpha$

Partie IV – Estimation par intervalle de confiance de σ^2, m étant inconnue.

$\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices à n lignes et 1 colonne à coefficients réels, et $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$ l'identité de $\mathbb{R}^n$.
Pour n entier supérieur à 2, on pose :
$$M_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i, \qquad S_n = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - M)^2, \qquad U_n = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i - M_n)^2.$$

1. Soit φ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dont la matrice dans la base canonique est A définie par :
   $$A = (a_{i,j})_{1\leqslant a,j\leqslant n}, \quad \text{avec} \quad \begin{cases} a_{i,i} = n-1 & \\ a_{i,j} = -1 & \text{si } i \neq j, \end{cases}$$
   et B la matrice de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ dont tous les éléments sont égaux à 1.

(a) Justifier que A est une matrice diagonalisable.

(b) Calculer le produit AB, en déduire une valeur propre de A et un vecteur propre de A associé à cette valeur propre.

(c) Montrer que $\dim \operatorname{Im}(\varphi - n\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}) = 1$.

(d) En déduire la dimension de $\operatorname{Ker}(\varphi - n\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n})$, les valeurs propres et les sous-espaces propres de la matrice A.

(e) Soit $W = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$ la matrice des coordonnées d'un vecteur propre de φ associé à la valeur propre n.

Prouver que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} w_i = 0$.

(f) Justifier l'existence d'une matrice P inversible dont la dernière colonne est proportionnelle à B et d'une matrice diagonale D que l'on déterminera, telle que : $P^{-1}AP = D$, avec ${}^tP = P^{-1}$ (on ne demande pas la matrice P).

(g) On note $(p_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ les coefficients de la matrice ${}^tP$. Montrer que :

$$\forall i \in [\![1, n-1]\!], \quad \sum_{j=1}^{n} p_{i,j} = 0, \qquad \text{puis:} \qquad \forall i \in [\![1, n]\!], \quad \sum_{j=1}^{n} p_{i,j}^2 = 1.$$

2. Soit q l'application de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad q(X) = {}^tXMX, \quad \text{où } M = \frac{1}{n} \cdot A.$$

(a) On pose $Y = {}^tPX$, montrer que $q(X) = \dfrac{1}{n}\, {}^tYDY$, puis que :

$$q(X) = \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} x_j \right)^2$$

(b) En utilisant l'écriture $q(X) = \dfrac{1}{n}\, {}^tYDY$, montrer que

$$q(X) = \sum_{i=1}^{n-1} \left(\sum_{j=1}^{n} p_{i,j} x_j \right)^2.$$

3. Pour tout i de l'ensemble $[\![1, n-1]\!]$, on pose $Y_i = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} p_{i,j} X_j$.

(a) Justifier que Y_i suit une loi normale, puis montrer que $E(Y_i) = 0$ et $V(Y_i) = \sigma^2$.

(b) En utilisant les résultats de la question IV-2, montrer que $U_n = \dfrac{1}{\sigma^2} \displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} Y_i^2$.

(c) En admettant que les $(Y_i)_{1 \leqslant i \leqslant n-1}$ sont mutuellement indépendantes, justifier que U_n suit une loi du chi-deux à $n-1$ degrés de liberté.

(d) Désormais, α désigne un réel appartenant à $]0, 1]$. Montrer que les événements :

$$\left[\frac{(n-1)S_n}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)} \leqslant \sigma^2 \leqslant \frac{(n-1)S_n}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)} \right] \qquad \text{et} \qquad \left[\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) \leqslant U_n \leqslant \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1) \right]$$

sont égaux.

(e) En déduire que la probabilité de l'événement $\left[\dfrac{(n-1)S_n}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)} \leqslant \sigma^2 \leqslant \dfrac{(n-1)S_n}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)} \right]$ est $1 - \alpha$.