Question de cours : Lemme des bergers

Exercice 1 – Nature et somme de la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}}(n^3+2n^2-3n-1)\cdot\frac{2^n}{n!}$

Exercice 2 – Soient $\sum a_n$ et $\sum b_n$ deux séries convergentes à termes positifs.

1. Montrer que les séries de termes généraux $\min(a_n, b_n)$ et $\max(a_n, b_n)$ convergent
2. Montrer que $\sum \sqrt{a_n b_n}$ converge.
3. En déduire que, si $\sum a_n$ converge, alors $\sum \sqrt{a_n a_{n+1}}$ converge. La réciproque est-elle vraie ?

Question de cours : Théorème de comparaison des séries par inégalité.

Exercice 3 – Nature de la série de terme général $u_n = \mathrm{e}^{-\sqrt{5+n}}$

Exercice 4 – Soit pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, $\displaystyle S_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$, et $u_n = S_n - \ln n$.

1. Quelle est la limite de (S_n) ?
2. Montrer que la série de terme général $u_{n+1} - u_n$ converge.
3. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers une limite $C \in \mathbb{R}_+$. Ce réel C est appelée *constante d'Euler.*
4. Donner un équivalent simple de (S_n).

Exercice 5 – Soit $p \geqslant 2$, $q \geqslant 0$, et $(a_1, \dots, a_p) \in \mathbb{N}^p$. Montrer par une méthode combinatoire que $\displaystyle\sum_{j_1+\cdots+j_p=q}\binom{a_1}{j_1}\cdots\binom{a_p}{j_p} = \binom{a_1+\cdots+a_p}{q}$.

Question de cours : Théorème de comparaison des séries par équivalents.

Exercice 6 – Nature de la série de terme général $u_n = \mathrm{e} - \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$

Exercice 7 – Montrer par une méthode combinatoire que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}^2 = n\binom{2n-1}{n-1}$.

Exercice 8 – Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs. Montrer que les séries $\sum u_n$ et $\sum \dfrac{u_n}{1+u_n}$ sont de même nature.