

Question de cours : Série exponentielle : preuve de la convergence.

Exercice 1 – Soit $p \geq 2$, $q \geq 0$, et $(a_1, \dots, a_p) \in \mathbb{N}^p$. Montrer par une méthode combinatoire que
$$\sum_{j_1 + \dots + j_p = q} \binom{a_1}{j_1} \dots \binom{a_p}{j_p} = \binom{a_1 + \dots + a_p}{q}.$$

Exercice 2 – Soit $a > 0$, on pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{a(a+1) \dots (a+n-1)}{n^{a-1}(n!)}$.

1. Étudier la convergence de la série de terme général $\ln \frac{u_{n+1}}{u_n}$.
2. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ a une limite strictement positive.

Question de cours : Définition d'une algèbre, d'une tribu

Exercice 3 – Soient $\sum a_n$ et $\sum b_n$ deux séries convergentes à termes positifs.

1. Montrer que les séries de termes généraux $\min(a_n, b_n)$ et $\max(a_n, b_n)$ convergent
2. Montrer que $\sum \sqrt{a_n b_n}$ converge.
3. En déduire que, si $\sum a_n$ converge, alors $\sum \sqrt{a_n a_{n+1}}$ converge. La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 4 – Soit $(M, N, n) \in \mathbb{N}^3$. Montrer que :

$$\sum_{k=0}^n \binom{k}{M} \binom{n-k}{N} = \binom{n+1}{M+N+1}.$$

Question de cours : Théorème de comparaison des séries par équivalents.

Exercice 5 – Montrer par une méthode combinatoire que
$$\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k}^2 = n \binom{2n-1}{n-1}.$$

Exercice 6 – Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs. Montrer que les séries $\sum u_n$ et $\sum \frac{u_n}{1+u_n}$ sont de même nature.