	<p>Question de cours : Définition d'un espace vectoriel</p> <p>Exercice 1 – Montrer que $F = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid f(1) = 0\}$ et $G = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid \exists a \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = ax\}$. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.</p> <p>Exercice 2 – Un fumeur décide de s'arrêter de fumer. On admet que s'il ne fume pas un jour, la probabilité qu'il ne fume pas le lendemain est 0,3. S'il fume, la probabilité qu'il ne fume pas le lendemain est 0,9. Quelle est la probabilité qu'il fume le n-ième jour ? Limite. Quelle est la probabilité qu'il finisse par s'arrêter de fumer ?</p>	
	<p>Question de cours : Définition de la somme de deux espaces vectoriels, de la somme directe</p> <p>Exercice 3 – Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), et A et B deux sous-espaces vectoriels de E. Montrer que les trois propositions suivantes sont équivalentes :</p> <ul style="list-style-type: none"> (i) $A \cup B = A + B$, (ii) $A \cup B$ est un sous-espace vectoriel de E, (iii) $A \subset B$ ou $B \subset A$. <p>Exercice 4 – Supposons A indépendant de $B \cup C$ et de $B \cap C$, B indépendant de $C \cap A$ et C indépendant de $A \cap B$. On suppose de plus que les probabilités $P(A)$, $P(B)$ et $P(C)$ sont non nulles. Montrer que A, B et C sont mutuellement indépendantes.</p>	
	<p>Question de cours : Formule des probabilités composées (sans preuve)</p> <p>Exercice 5 – Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. Soit E le sous-ensemble de $\mathbb{C}^n$ formé des n-uplets $(\lambda, \lambda, \dots, \lambda)$, pour $\lambda \in \mathbb{C}$, et soit</p> $H = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n, \sum_{i=1}^n x_i = 0.\}$ <p>Justifier que E et H sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{C}^n$, puis montrer que E et H sont supplémentaires dans $\mathbb{C}^n$.</p> <p>Exercice 6 – Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé.</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Deux événements A et B sont à la fois incompatibles et indépendants. Montrer que l'un des deux est presque-impossible. 2. Réciproquement, peut-on dire que si soit A soit B est presque-impossible, alors A et B sont incompatibles et indépendants ? 3. Un événement A peut-il être incompatible avec lui-même ? indépendant de lui-même ? 	