

	Question de cours : Définition d'une famille libre Exercice 1 – Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On note $u^2 = u \circ u$. Montrer que : $\text{Ker } u \subset \text{Ker } u^2$ et $\text{Im } u^2 \subset \text{Im } u$. $\text{Ker } u = \text{Ker } u^2 \iff \text{Im } u \cap \text{Ker } u = \{0\}$. Exercice 2 – Étudier la liberté des familles suivantes (dans le $\mathbb{R}$-ev des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$) : $(\varphi_a, \varphi_b), (a, b) \in \mathbb{R}^2$, où pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\varphi_a : x \mapsto \sin(x + a)$. $(\varphi_a, \varphi_b, \varphi_c), (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.	
	Question de cours : Définition du noyau d'une application linéaire. Caractérisation de l'injectivité à l'aide du noyau (avec preuve) Exercice 3 – Étudier la liberté de la famille suivante dans le $\mathbb{R}$ espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$: $(f_k)_{0 \leq k \leq n}, f_k : x \mapsto \cos^k x.$ Exercice 4 – Soit E, F et G trois espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$. Montrer les formules suivantes : $\text{Ker}(g \circ f) = f^{-1}(\text{Ker}(g))$; $\text{Ker}(g \circ f) \supset \text{Ker}(f)$; $\text{Im}(g \circ f) = g(\text{Im}(f))$; $\text{Im}(g \circ f) \subset \text{Im}(g)$; $\text{Ker}(g \circ f) = \text{Ker}(f) \iff \text{Ker}(g) \cap \text{Im}(f) = \{0\}$; $\text{Im}(g \circ f) = \text{Im}(g) \iff \text{Ker}(g) + \text{Im}(f) = F$.	
	Question de cours : Définition d'une application linéaire, d'un endomorphisme, d'un isomorphisme, d'un automorphisme. Notations pour les ensembles. Exercice 5 – On dit qu'un endomorphisme p de E est un projecteur de E si et seulement si $p \circ p = p$ - Montrer que id_E et $0_{\mathcal{L}(E)}$ sont des projecteurs. - Montrer que si p est un projecteur de E, alors $\text{id}_E - p$ est un projecteur de E. - Montrer que si p est un projecteur, $\text{Im}(p) = \{x \in E, p(x) = x\}$ - Montrer que si p est un projecteur, alors $\text{Im}(p)$ et $\text{Ker}(p)$ sont supplémentaires dans E. - Soient p et q deux projecteurs. Montrer que $p = q$ si et seulement si $\text{Im } p = \text{Im } q$ et $p \circ q = q \circ p$. - Soient p et q deux projecteurs de E. Montrer que $p + q$ est un projecteur si et seulement si $p \circ q = q \circ p = 0$.	