Question de cours : Théorème des valeurs intermédiaires (avec démonstration)

Exercice 1 – Soit $f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$, continue.

1. Montrer que : $\forall n \geqslant 1,\ \exists u_n \in [0,1],\ f(u_n) = u_n^n$.
2. On suppose que f est strictement décroissante. Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, u_n est unique, et que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.

Exercice 2 –

1. Étudier la continuité de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ f définie par : $f(x) = x$ si $x \in \mathbb{Q}$ et $f(x) = 0$ si $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$;
2. Donner un exemple d'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ discontinue en tout point de $\mathbb{R}$, et telle que $|f|$ soit continue sur $\mathbb{R}$.
3. Donner un exemple d'application $f : [0,1] \to [0,1]$ bijective, et discontinue en tout point de $[0,1]$.

Question de cours : Caractérisation séquentielle de la limite

Exercice 3 – Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction bornée sur tout intervalle de longueur 1. On suppose que $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x+1) - f(x)) = 0$. Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$.

Exercice 4 – Soit I un intervalle, et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(I) \subset \mathbb{Q}$. Montrer que f est constante.

Question de cours : Définition de la limite ; caractérisation par ε, caractérisation séquentielle.

Exercice 5 – Soit $f : [a,b] \to [a,b]$ une fonction continue sur $[a,b]$. Montrer qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = c$ (autrement dit, f admet un point fixe).

Exercice 6 – On dit qu'un endomorphisme p de E est un projecteur de E si et seulement si $p \circ p = p$

1. Montrer que id_E et $0_{\mathcal{L}(E)}$ sont des projecteurs.
2. Montrer que si p est un projecteur de E, alors $\mathrm{id}_E - p$ est un projecteur de E.
3. Montrer que si p est un projecteur, $\mathrm{Im}(p) = \{x \in E,\ \ p(x) = x\}$
4. Montrer que si p est un projecteur, alors $\mathrm{Im}(p)$ et $\mathrm{Ker}(p)$ sont supplémentaires dans E.
5. Soient p et q deux projecteurs. Montrer que $p = q$ si et seulement si $\mathrm{Im}\, p = \mathrm{Im}\, q$ et $p \circ q = q \circ p$.
6. Soient p et q deux projecteurs de E. Montrer que $p + q$ est un projecteur si et seulement si $p \circ q = q \circ p = 0$.