

	Question de cours : Théorème des valeurs intermédiaires (avec idée rapide de la démonstration) Exercice 1 – Soit $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, continue. - Montrer que : $\forall n \geq 1, \exists u_n \in [0, 1], f(u_n) = u_n^n$. - On suppose que f est strictement décroissante. Montrer que pour tout $n \geq 1$, u_n est unique, et que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$. Exercice 2 – Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = a \in \mathbb{R}^+$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{3u_n + 4}$. - Montrer que la fonction $f : x \mapsto \sqrt{3x + 4}$ est croissante sur son domaine de définition. - Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est monotone. Étudier son sens de variation suivant la valeur de a. - Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge, et déterminer sa limite.	
	Question de cours : Théorème de la bijection (sans démonstration) Exercice 3 – Soit I un intervalle, et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(I) \subset \mathbb{Q}$. Montrer que f est constante. Exercice 4 – (Algorithme de Héron) Soit $a > 0$, et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{2} \left(u_n + \frac{a}{u_n} \right).$ - Montrer que (u_n) converge, et déterminer sa limite. - Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} - \sqrt{a} \leq \frac{(u_n - \sqrt{a})^2}{2\sqrt{a}}$. - En déduire une majoration de $u_n - \sqrt{a}$ en fonction de a, u_1 et n. - Donner une condition pour que cette majoration puisse s'exprimer en fonction de a, u_0 et n. Quelle majoration obtient-on ? - On prend $u_0 = 2$. Déterminer une valeur de n aussi petite que possible pour laquelle u_n donne une valeur approchée de $\sqrt{2}$ à 10^{-100} près. Reprendre la question à l'aide cette fois d'une majoration de $u_n - \sqrt{a}$ en fonction de a, u_1 et n.	
	Question de cours : Définition de la continuité, caractérisation par ε, caractérisation séquentielle. Exercice 5 – Soit $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ une application continue telle que $\forall x > 0, f(x) < x$. - Montrer que $f(0) = 0$. - Montrer que pour tout $0 < a < b$, il existe $M < 1$ tel que $f(x) \leq Mx$ sur $[a, b]$. Exercice 6 – Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une application continue et surjective telle que pour tout $y \in \mathbb{R}$, $f^{-1}(y)$ est un sous-ensemble borné de $\mathbb{R}$. Montrer que f admet des limites infinies en $+\infty$ et $-\infty$, de signe opposé.	