Question de cours : Que peut-on dire des limites en tout point de la fonction de répartition d'une variable aléatoire ?

Exercice 1 – Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = a \in \mathbb{R}^+$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{3u_n + 4}$.

1. Montrer que la fonction $f : x \mapsto \sqrt{3x+4}$ est croissante sur son domaine de définition.
2. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone. Étudier son sens de variation suivant la valeur de a.
3. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, et déterminer sa limite.

Exercice 2 – Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction périodique.

1. Montrer que si f n'est pas constante, alors f n'admet pas de limite en $+\infty$ et $-\infty$.
2. Montrer que si f est continue, alors f est bornée et atteint ses bornes en une infinité de points

Question de cours : Loi de $Y = g(X)$? Expliciter le cas $Y = X^2$.

Exercice 3 – (Algorithme de Héron) Soit $a > 0$, et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 > 0$ et

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right).$$

1. Montrer que (u_n) converge, et déterminer sa limite.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\left|u_{n+1} - \sqrt{a}\right| \leqslant \dfrac{(u_n - \sqrt{a})^2}{2\sqrt{a}}$.
3. En déduire une majoration de $|u_n - \sqrt{a}|$ en fonction de a, u_1 et n.
4. Donner une condition pour que cette majoration puisse s'exprimer en fonction de a, u_0 et n. Quelle majoration obtient-on ?
5. On prend $u_0 = 2$. Déterminer une valeur de n aussi petite que possible pour laquelle u_n donne une valeur approchée de $\sqrt{2}$ à 10^{-100} près. Reprendre la question à l'aide cette fois d'une majoration de $|u_n - \sqrt{a}|$ en fonction de a, u_1 et n.

Question de cours : Définition d'une variable aléatoire réelle. D'une variable aléatoire réelle discrète.

Exercice 4 – Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$. Montrer que f admet une borne inférieure, et que celle-ci est atteinte.

Exercice 5 – Trouver toutes les lois de probabilité $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $p_{n+2} = \frac{5}{6}p_{n+1} - \frac{1}{6}p_n$. On pourra expliciter p_n en fonction de n et p_0 et p_1, exprimer p_1 en fonction de p_0, et montrer que $p_0 \leqslant \frac{1}{3}$; réciproquement, toute valeur de p_0 telle que $p_0 \leqslant \frac{1}{3}$ convient.