**Question de cours :** Énoncé du théorème de la dimension, définition de la dimension.

**Exercice 1** – Une urne contient $n$ jetons numérotés de 1 à $n$. On tire une poignée aléatoire éventuellement vide. On note $Y$ le nombre de jetons, et $X$ la somme des numéros obtenus. On suppose que $Y$ suit une loi uniforme.

1. Préciser $X(\Omega)$.
2. Soit $X_k$ la variable aléatoire égale à $k$ si le jeton $k$ est dans la poignée, et 0 sinon. Montrer que $\frac{X_k}{k}$ suit une loi de Bernoulli dont on précisera le paramètre.
3. Calculer $E(X)$.

**Exercice 2** – Jules et Julie tiennent un commerce. Le nombre de clients dans une journée suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda$. Jules parie qu'aujourd'hui, ils auront un nombre impair de clients. Julie parie le contraire. Qui a le plus de chance de gagner son pari ?

---

**Question de cours :** Familles libres et génératrices.

**Exercice 3** – (Oral E.S.C.P.) – Soit $X$ une v.a.r. de loi $\mathcal{B}(n,p)$. Chaque résultat de $X$ est affiché sur un compteur détraqué : si $X$ n'est pas nul, le compteur affiche la bonne valeur ; si $X$ est nul, il affiche au hasard une valeur entre 1 et $n$. On note $Y$ la variable aléatoire égale au nombre affiché.

1. Déterminer la loi de $Y$ et son espérance.
2. Montrer, sans calcul, que $E(Y) \geqslant E(X)$.

**Exercice 4** – Soit $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$, et $F_X$ sa fonction de répartition. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad F_X(n) = \frac{1}{n!}\int_\lambda^{+\infty} \mathrm{e}^{-x} x^n \, \mathrm{d}x.$$

---

**Question de cours :** Définition d'un espace vectoriel de dimension finie.

**Exercice 5** – **(Oral HEC)** – Le nombre de visiteurs quotidiens d'un parc d'attraction suit une loi de Poisson de paramètre 10000. Ce parc a dix entrées $E_1, \dots, E_{10}$ qui sont équiprobables.

1. Déterminer le nombre moyen de visiteurs en une journée
2. On désigne par $X_1$ le nombre de visiteurs entrant par $E_1$ en une journée donnée. Déterminer la loi de $X_1$, et en déduire son espérance et sa variance.
3. Sachant qu'un visiteur sur 10 se débrouille pour entrer sans payer, calculer le nombre moyen de visiteurs qui payent et entrent par $E_1$ par jour.

**Exercice 6** – Soit $k \in \mathbb{N}$. Le moment factoriel d'ordre $k$ d'une v.a.r. $X$ est : $\mu_{[k]} = E(X(X-1)\cdots(X-k+1))$.
Soit $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$. Montrer que pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, $\mu_{[k]} = \dfrac{n!}{(n-k)!}p^k$.