

Exercice 1 – Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, et $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4)$ can. associé à A .

- Déterminer $\text{rg}(f)$, une base de $\text{Ker}(f)$ et une base de $\text{Ker}(f - \text{id})$.
- Déterminer une base de $\text{Ker}(f^2)$ et une base de $\text{Ker}(f - \text{id})^2$. Montrer que ces deux espaces sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$.
- Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3, e'_4)$ de $\mathbb{R}^4$ dans laquelle la matrice de f est égale à $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 2 – Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On définit la trace de A par : $\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{i,i}$.

- tr est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
- $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$, $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$.
- Deux matrices semblables ont même trace. (On dit que deux matrices A et B sont semblables s'il existe une matrice inversible P telle que $B = P^{-1}AP$)

Exercice 3 – Soit $f : \mathbb{R}_n[X] \longrightarrow \mathbb{R}_n[X]$ définie par $f(P) = P + P'$.

- Montrer que f est un automorphisme.
- Déterminer la matrice M de f relativement à la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$
- Montrer qu'il existe une matrice N telle que $M = I_n + N$, et $N^n = 0$ (on dit que N est nilpotente)
- Soit $n = 4$. Déterminer explicitement M^k , pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Exercice 4 – Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ telle que $f \neq 0$, et $f^2 = 0$. Montrer qu'il existe une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est égale à $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 5 – Soit $f(x) = \left[\frac{1}{\sin \frac{1}{x}} \ln \left(\frac{x}{x+1} \right) \right] \sqrt{x^2 + 1}$

- Donner un équivalent de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
- Déterminer une asymptote au graphe de f et la position relative des deux courbes au voisinage de l'infini.

Exercice 6 – Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$, représentée par la matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ dans la base canonique. Exprimer la matrice de f :

- relativement à la base canonique et à la base $((1, 1), (1, -1))$;
- relativement à la base $((1, 1), (1, -1))$ et à la base canonique ;
- relativement à la base canonique et à la base $((1, -1), (1, 1))$;
- dans la base $((1, 2), (-1, 2))$;
- dans une base dans laquelle sa matrice est diagonale ; en déduire A^n .