Question de cours : Théorème de Rolle (avec preuve)

Exercice 1 – Déterminer l'ensemble des solutions du système suivant, selon la valeur du paramètre $m \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x - 2y + z & = & 1 \\ -x + 3z & = & 5 \\ x - 3y + z & = & 1 \\ 2x + 2y + z & = & m \end{cases}$$

Exercice 2 – Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que f admette une limite ℓ en $+\infty$.

1. Montrer que la suite $(f(n+1) - f(n))_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 0
2. Montrer qu'il existe une suite c_n de limite $+\infty$ telle que $f'(c_n)$ tende vers 0.
3. On suppose que f vérifie $f^2 + (1+f')^2 \leqslant 1$ sur $\mathbb{R}$. Montrer que f est décroissante et bornée, puis que f est identiquement nulle.

Question de cours : Définition d'un ouvert, d'un fermé de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 3 – Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0,1]$, telle que $f(0) = f'(0) = f(1) = 0$.

1. Justifier l'existence de bornes supérieures M, M' et M'' de $|f|$, $|f'|$ et $|f''|$, et l'existence d'un réel $\alpha \in]0,1[$ tel que $|f(\alpha)| = M$.
2. Montrer que pour tout $x \in [0,1]$, $|f'(x)| \leqslant M'' \cdot \min(x, |x - \alpha|)$.
3. En déduire que $|f(\alpha)| \leqslant M'' \cdot \min\left(\frac{\alpha^2}{4}, \frac{(1-\alpha)^2}{2}\right)$.
4. En déduire que $M \leqslant \left(\frac{3}{2} - \sqrt{2}\right) \cdot M''$
5. Trouver une fonction non nulle pour laquelle l'inégalité précédente est une égalité.
6. On suppose de plus que $f'(1) = 0$. Montrer que $M \leqslant \frac{1}{16} \cdot M''$, et que cette inégalité est optimale.

Question de cours : Théorème des accroissements finis (avec preuve)

Exercice 4 – Soit $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$. Montrer que A est inversible. Calculer son inverse.

Exercice 5 – Soit f une fonction continue sur $[0,1]$, dérivable sur $]0,1[$, telle que $f(0) = f(1)$.
Montrer qu'il existe $x_1 < \cdots < x_n$ tels que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} f'(x_i) = n$ et $y_1 < \cdots < y_n$ tels que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{f'(x_i)} = n$.