Question de cours : Théorème de changement de variables dans une intégrale : énoncé et démonstration.

Exercice 1 – Étude de la fonction définie par

$$f(x) = 2\,\mathrm{Arctan}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + \mathrm{Arcsin}(x)$$

pour tout x réel pour lequel cette expression est définie. En déduire une expression simplifiée de f sur son domaine.

Exercice 2 – Calculer l'intégrale suivante :

$$I_1 = \int_1^{\mathrm{e}} \frac{2\ln x\ \mathrm{d}x}{x(\ln^2 x + 1)(\ln x + 1)}$$

Question de cours : Définition de Arctan, dérivabilité et expression de la dérivée.

Exercice 1 – Soit f une fonction continue sur $[a,b]$ telle que : $\forall t \in [a,b],\ f(a+b-t) = f(t)$.

1. À l'aide d'un changement de variable, montrer que :
$$\int_a^b t f(t)\ \mathrm{d}t = \frac{a+b}{2}\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t.$$
2. En déduire la valeur de : $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\ \mathrm{d}x$.

Exercice 2 – On définit, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{sh}(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}$.

1. Montrer que sh admet une fonction réciproque Argsh dérivable sur son domaine de définition. Déterminer sa dérivée.
2. Expliciter Argsh à l'aide des fonctions logarithme et exponentielle.
3. Retrouver l'expression de la dérivée de Argsh.

Question de cours : Énoncé et démonstration du théorème de dérivation des fonctions réciproques.

Exercice –

1. Soit A et B deux ensembles et $f : A \to B$, $g : B \to A$ deux applications telles que $g \circ f$ est injective, et $f \circ g$ est surjective. Montrer que f et g sont bijectives.
2. Soit A, B, C des ensembles, $f : A \to B$, $g : B \to C$, $h : C \to A$, trois applications. On suppose que toutes les applications $h \circ g \circ f$, $g \circ f \circ h$ et $f \circ h \circ g$ sont chacune soit injective soit surjective. On suppose de plus qu'au moins une de ces applications est injective, et au moins une est surjective. Montrer que f, g et h sont des bijections.
3. Généraliser à n ensembles $A_1, \dots, A_n$ et n applications $f_i : A_i \to A_{i+1}$, $i \in [\![1, n-1]\!]$, et $f_n : A_n \to A_1$.