Question de cours : Définition de la convexité. Caractérisation pour des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$; de classe $\mathcal{C}^2$.

Exercice 1 – Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & -8 \\ 4 & 12 \end{pmatrix}$.

1. Trouver $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ et D diagonale tels que $D = P^{-1}AP$.
2. Soit B tel que $BA = AB$. Montrer que tout vecteur propre de A est vecteur propre de B. En déduire que $P^{-1}BP$ est diagonale dès que B commute avec A.
3. Trouver toutes les matrices M réelles d'ordre 2 telles que $M^2 = A$.
4. Même question avec $A = I_2$, puis $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Question de cours : Voisinage, ouvert, fermé. Union et intersection d'ouverts.

Exercice 2 – Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. A est-elle diagonalisable ?

Exercice 3 – Soit f l'application définie sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$ à valeurs réelles, par :

$$f(x,y) = \frac{x^2 + xy + \sqrt{y}}{x\sqrt{y}}.$$

1. Montrer que pour tout (a,b,c) de $(\mathbb{R}_+^*)^2$, on a $\frac{a+b+c}{3} \geqslant (abc)^{\frac{1}{3}}$, avec égalité si et seulement si $a = b = c$ (on pourra utiliser la concavité d'une certaine fonction)
2. En déduire que pour tout $(x,y) \in (R_+^*)^2$, $f(x,y) \geqslant 3$, puis montrer que f admet un minimum, atteint en un unique point que l'on précisera.
3. Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ l'inéquation $\mathrm{e}^{2x} + \mathrm{e}^y \leqslant \mathrm{e}^{x+y}(3 - \mathrm{e}^y)$.

Question de cours : Matrice de passage, formule de changement de base.

Exercice 4 – Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie pour $n \geqslant 1$ par $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n$.

1. En utilisant un encadrement de $\frac{1}{x}$ sur chaque intervalle $[k, k+1]$, $k \in [\![1, n-1]\!]$, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \in [0,1]$.
2. (a) Montrer que la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ est concave sur $]-1, +\infty[$.
   (b) En écrivant $u_n - u_{n-1} = \varphi\left(\frac{1}{n}\right)$ pour une certaine fonction φ, montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est monotone. En déduire qu'elle est convergente.
   Dans toute la suite de l'exercice, on note γ la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
3. Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $D_n = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\quad n \leqslant x \leqslant n+1 \text{ et } \frac{1}{n+1} \leqslant y \leqslant \frac{1}{x}.\right\}$.
   (a) Représenter graphiquement D_n et montrer que l'aire de D_n est égale à $u_n - u_{n+1}$.
   (b) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) \leqslant u_n - u_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$.
   (On pourra utiliser de deux manières la convexité de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$)
4. En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\quad u_n - \frac{1}{2n} \leqslant \gamma \leqslant u_n - \frac{1}{2(n+1)}$.