

	Question de cours : Changement de variable dans une intégrale. Exercice – 1. Soit $P(X)$ un polynôme de degré noté n tel qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $(X^2 - 1)P''(X) + 4XP'(X) = \lambda P(X). \quad (1)$ (a) Montrer, en considérant les termes de plus haut degré, que $\lambda = n(n+3)$. (b) Soit $Q(X) = (-1)^n P(-X)$. Montrer que $Q(X)$ est solution de (1). (c) En étudiant $\deg(P(X) - Q(X))$, prouver que $P(X) = Q(X)$. En déduire la parité de $P(X)$ en fonction de n. 2. Montrer que pour tout n, l'équation (1) admet une unique solution P_n unitaire. On pourra donner une relation de récurrence satisfaite par les coefficients de P_n.	
	Question de cours : Définition, dérivabilité et dérivée de Arctan Exercice – Soit $P(X)$ un polynôme nul de degré p. Pour tout entier $n \geq 0$, on lui associe le polynôme $D_n(P)$ défini par : $D_n(P) = (X^2 - 1)P''(X) + 2XP'(X) - n(n+1)P(X)$. 1. (a) Vérifier que le polynôme $D_n(P)$ est de degré inférieur ou égal à p, en distinguant les trois cas $p = 1$, $p = 1$ et $p \geq 2$. (b) Montrer que : • lorsque $p = 0$, $D_n(P)$ est le polynôme nul si et seulement si $n = 0$. • lorsque $p \geq 1$, le degré du polynôme $D_n(P)$ est strictement inférieur à p si et seulement si $p = n$. En déduire que si un polynôme P, différent du polynôme nul, vérifie $D_n(P) = 0$, alors son degré est n. (c) Déterminer tous les polynômes P vérifiant $D_n(P) = 0$, lorsque $n \in \llbracket 0, 3 \rrbracket$. 2. (a) Pour tout polynôme P de degré $n \geq 2$, expliciter les coefficients du polynôme $D_n(P)$ en fonction des coefficients de P. (b) Soit $a \neq 0$. Montrer qu'il existe un unique polynôme $P(X)$ de degré n de coefficient dominant a tel que $D_n(P) = 0$.	
	Question de cours : Degré d'une somme et d'un produit de polynômes. Exercice 1 – On définit, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\text{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$. 1. Montrer que sh admet une fonction réciproque Argsh dérivable sur son domaine de définition. Déterminer sa dérivée. 2. Expliciter Argsh à l'aide des fonctions logarithme et exponentielle. 3. Retrouver l'expression de la dérivée de Argsh. Exercice 2 – Calculer $\int_{-1}^1 \frac{\text{Arctan}(x) \sin(\text{Arctan}(x))}{1+x^2} dx$.	