Question de cours : Formule de Leibniz

Exercice 1 – Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P(0) = 0$ et $P(X^2 + 1) = P(X)^2 + 1$.

Exercice 2 – Calculer $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin^3 x(1 + \cos^2 x)}$

Question de cours : Définition et caractérisation de l'ordre de multiplicité (sans démonstration)

Exercice 3 –

1. Soit $P = X^{2n} - 1$. Décomposer P en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}$, puis dans $\mathbb{R}$.
2. En déduire une expression simple de $Q = \displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} \left(X^2 - 2X \cos \frac{k\pi}{n} + 1 \right)$.
3. Calculer $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{2n}$.

Exercice 4 – Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_1^{e^\pi} \sin(\ln(x))\, dx$

Questions de cours :

1. Énoncé de la formule de Taylor.
2. Énoncé du théorème de d'Alembert-Gauss

Exercice 5 – Trouver tous les polynômes P de degré 7 tels que le reste de la division euclidienne de P par $(X + 2)^4$ soit égal à 2 et le reste de la division euclidienne de P par $(X - 2)^4$ soit égal à -2.

Exercice 6 – Soit $(a, b, c, d) \in \mathbb{N}^4$. Montrer que $X^{4a+3} + X^{4b+2} + X^{4c+1} + X^{4d}$ est divisible par $X^3 + X^2 + X + 1$.