Matrices symétriques - antisymétriques
Soit n un entier naturel non nul, on note S_n l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, et A_n l'ensemble des matrices antisymétriquesde $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. (a) Montrer que A_n et S_n sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont on précisera les dimensions.
   (b) Montrer que S_n et A_n sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
2. Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on considère l'application $f : A_n \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $f(M) = {}^tA \cdot M + M \cdot A$.
   (a) Montrer que f peut être considéré comme un endomorphisme de A_n.
   (b) Montrer que $\operatorname{tr}(f) = (n-1)\operatorname{tr}(A)$ (on rappelle que deux matrices semblables ont même trace)
3. (a) Soit N une matrice de S_n. Montrer que $N = 0 \iff \operatorname{tr}(N^2) = 0$.
   (b) Soit $(A, B) \in S_n^2$. Montrer que

$$AB = BA \iff \operatorname{tr}((AB - BA)^4) = 0.$$

Exercice 1 – Soit $A = \begin{pmatrix} -13 & 8 & -3 \\ -2 & 4 & -6 \\ -1 & 8 & 9 \end{pmatrix}$.

1. La matrice A est-elle diagonalisable ?
2. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 2 – Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension finie non nulle n, et E_1 et F_1 deux sous-espaces vectoriels de E tels que $E = E_1 + F_1$.

1. Montrer l'existence d'un sous-espace vectoriel E_2 inclus dans F_1 et d'un sous-espace vectoriel F_2 inclus dans E_1 tels que

$$E = E_1 \oplus E_2 \qquad \text{et} \qquad E = F_1 \oplus F_2.$$

2. Soit s la symétrie vectorielle par rapport à E_1 de direction E_2, et s' la symétrie par rapport à F_1 de direction F_2. Démontrer que $s' \circ s = s \circ s'$.
3. Démontrer que $s' \circ s$ est une symétrie vectorielle dont on précisera les éléments caractéristiques.

Matrices stochastiques
Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On dit que A est stochastique si et seulement si l'on a :

$$\forall (i,j) \in [\![1, n]\!]^2, \quad a_{i,j} \geqslant 0 \qquad \text{et} \qquad \forall i \in [\![1, n]\!], \ \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1.$$

1. Montrer que le produit de deux matrices stochastiques est stochastique.
2. Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, avec $\forall i, j,\ a_{i,j} \geqslant 0$, et $V \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients valent 1. Montrer que A est stochastique si et seulement si $AV = V$.
3. (a) Justifier que 1 est une valeur propre de toute matrice stochastique.
   (b) Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre d'une matrice stochastique A, considérée comme matrice complexe. Soit $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{C}^n$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ tel que $M_{\mathcal{B}}(f) = A$. Pour $x = (x_1, \dots, x_n)$ de $\mathbb{C}^n$, on pose :
   $$\|x\| = \max(|x_1|, \dots, |x_n|).$$
   Montrer que
      i. pour tout $x \in \mathbb{C}^n$, $\|f(x)\| \leqslant \|x\|$;
      ii. $|\lambda| \leqslant 1$.
4. Soit A une matrice stochastique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, λ une éventuelle valeur propre de A, considérée comme matrice à coefficients complexes, avec $\lambda \neq 1$, et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ un vecteur propre associé à λ. Montrer que $\sum_{i=1}^{n} x_i = 0$.