

Exercice 1 – Existence et valeur de $\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{Arctan} x}{x^2} dx$

Exercice 2 –

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin x|^x dx$.
Justifier la convergence de cette intégrale.
2. En minorant convenablement $\sin t$ sur l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}]$, montrer que la série de terme général u_n diverge.
3. En déduire la nature de $\int_{\pi}^{+\infty} |\sin x|^x dx$

Exercice 3 – (Polynômes de Charles Hermite)

1. Justifier, pour tout polynôme P de $\mathbb{R}[X]$, la convergence de $\int_{-\infty}^{+\infty} P(t)e^{-\frac{t^2}{2}} dt$.
2. On considère l'application φ définie sur $\mathbb{R}_n[X]^2$ par

$$\varphi(P, Q) = \int_{-\infty}^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Montrer que φ est un produit scalaire.

3. Soient $h : x \mapsto e^{-\frac{x^2}{2}}$, et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $H_n : x \mapsto (-1)^n e^{\frac{x^2}{2}} h^{(n)}(x)$.

(a) Trouver une relation entre H_{n+1} , H_n et H'_n

(b) Montrer que H_n est un polynôme de degré n .

Les polynômes H_n sont appelés « polynômes de Hermite ».

(a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $H_{n+1} = XH_n + nH_{n-1}$. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $H'_n = nH_{n-1}$.

(b) Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\int_{-\infty}^{+\infty} H_k(t)e^{-\frac{t^2}{2}} dt = 0$.

3. Montrer que les polynômes de Hermite sont orthogonaux deux à deux.

Exercice 4 –

Existence et valeur de $\int_0^1 \frac{t \ln t}{(1-t^2)^{\frac{3}{2}}} dt$

Exercice 5 –

1. Déterminer les valeurs de x réelles pour lesquelles $\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$ converge.
2. On pose alors $F(x) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$. Justifier la convergence de $\int_0^{+\infty} F(x) dx$, et calculer sa valeur.