Pour $n \geqslant 2$, on note E l'ensemble des matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de la forme :

$$A = \begin{pmatrix} a+b & 0 & \cdots & 0 & b \\ b & a & \ddots & \vdots & b \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & a & b \\ b & 0 & \cdots & 0 & a+b \end{pmatrix}$$

I désigne la matrice identité, et J la matrice élément de E obtenue pour $a = 0$ et $b = 1$.

1. Montrer que E est un espace vectoriel et que (I, J) en est une base.
2. Calculer J^k pour tout entier naturel k non nul. Prouver que E est stable par produit.
3. Pour $A = aI + bJ$, et $p \in \mathbb{N}$, exprimer en fonction de a, b et p les coordonnées de la matrice A^p dans la base (I, J).
4. On considère un élément $A = aI + bJ$ de E, tel que $b \neq 0$.
   (a) Prouver qu'il existe deux réels α et β tels que $A^2 = \alpha A + \beta I$
   (b) En déduire les valeurs propres possibles de A
   (c) A est-elle diagonalisable ? Si oui, déterminer une base de vecteurs propres de l'endomorphisme canoniquement associé à A.

Question de cours : Définir une forme bilinéaire. Matrice d'une forme bilinéiare dans une base ; formule de changement de base (sans démonstration).

Exercice
On considère la matrice A élément de $\mathcal{M}_{2p+1}(\mathbb{R})$ définie par $(a_{i,j})$, avec

$$\forall (i,j) \in [\![1, 2p+1]\!],\ a_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 1 & \text{si } i + j = 2p + 2 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Représenter A sous forme d'un tableau
2. La matrice A est-elle inversible ?
3. Diagonaliser A.

Soit $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{C}^n$, on considère la matrice :

$$C(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \\ \alpha_n & \alpha_1 & \cdots & \alpha_{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_2 & \alpha_3 & \dots & \alpha_1 \end{pmatrix}$$

Chaque ligne se déduit de la précédente par une permutation circulaire, consistant en un décalage d'un rang vers la droite, et retour en tête de l'élément final de la ligne précédente. Une telle matrice est appelée matrice circulante.

1. On considère la matrice $J = C(0, 1, 0 \dots, 0)$.
   (a) Exprimer J à l'aide des matrices $E_{i,j}$ de la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
   (b) Pour $k \in [\![1, n]\!]$, calculer J^k et montrer que $C(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ s'exprime comme une combinaison linéaire des J^k.
   (c) Soit $C_n = \{C(\alpha_1, \dots, \alpha_n), \alpha_i \in \mathbb{C}\}$. Montrer que C_n est un espace vectoriel, et déterminer sa dimension.
2. (a) Déterminer les valeurs propres complexes de J et les sous-espaces propres correspondants.
   (b) Montrer que $C(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ est diagonalisable, déterminer Γ une matrice diagonale semblable à $C(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, et déterminer les valeurs propres de $C(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$.