Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[0,1]$.

1. Montrer que l'application de E^2 dans $\mathbb{R}$ qui à (f,g) associe $\langle f,g\rangle$ est un produit scalaire sur E.
2. Montrer que pour tout $f \in E$,
$$\left|\int_0^1 f(t)\ \mathrm{d}t\right|^2 \leqslant \int_0^1 f^2(t)\ \mathrm{d}t.$$
3. Montrer que pour tout $f \in E$ et tout $k \in \mathbb{N}$,
$$\left|\int_0^1 t^k f(t)\ \mathrm{d}t\right|^2 \leqslant \frac{1}{2k+1}\int_0^1 f^2(t)\ \mathrm{d}t.$$
4. Soit $\ell \in \mathbb{N}$. Justifier que pour tout $k \geqslant \ell$, et tout $f \in E$,
$$\left|\int_0^1 t^k f(t)\ \mathrm{d}t\right|^2 \leqslant \frac{1}{2k-\ell+1}\int_0^1 t^\ell f^2(t)\ \mathrm{d}t.$$
5. Retrouver ce résultat en considérant
$$(f,g) \mapsto \langle f,g\rangle = \int_0^1 t^\ell f(t)g(t)\ \mathrm{d}t.$$

Exercice 1

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ un entier strictement positif.

1. Montrer que $n^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^n \sqrt{i}\right)^2 \leqslant \frac{n^2(n+1)}{2}$.
2. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$,
$$n \leqslant \sum_{i=1}^n \sqrt[2^k]{i} \leqslant n \cdot \sqrt[2^k]{\frac{n+1}{2}}$$

Exercice 2

La matrice suivante est-elle diagonalisable ? Si oui, la diagonaliser.
$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Exercice 1

1. La forme bilinéaire sur $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ est-elle symétrique ? définie ? positive ? Est-ce la matrice d'un produit scalaire ? Exprimer, en s'y prenant de deux manières, sa matrice dans la base $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.
2. Mêmes questions pour la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 4 & 9 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 2 La matrice suivante est-elle diagonalisable ?
$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$