Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 7 & 9 \end{pmatrix}$, et soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4)$ canoniquement associée.

1. Déterminer une base de $\mathrm{Im}(f)$ et de $\mathrm{Ker}(f)$.
2. Déterminer une base orthonormale (b_1, b_2) de $\mathrm{Im}(f)$.
3. Déterminer une base de $\mathrm{Im}(f)^{\perp}$, puis une base orthonormale
4. Justifier l'existence pour tout $x \in \mathbb{R}^4$ de $p(x)$, le projeté orthogonal de x sur $\mathrm{Im}(f)$. Justifier que cela définit $p \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4)$.
5. Déterminer la matrice de p dans une base de votre choix.
6. Déterminer de deux manières la matrice de p dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

Soit f une fonction continue sur $]-1,1[$. On dit que l'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(t)\ \mathrm{d}t$ converge si les deux limites $\displaystyle\lim_{x\to 1^-}\int_0^x f(t)\ \mathrm{d}t$ et $\displaystyle\lim_{y\to -1^+}\int_y^0 f(t)\ \mathrm{d}t$ existent dans $\mathbb{R}$. Dans ce cas, on définit : $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(t)\ \mathrm{d}t = \lim_{x\to 1^-}\int_0^x f(t)\ \mathrm{d}t + \lim_{y\to -1^+}\int_y^0 f(t)\ \mathrm{d}t$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{t^n}{\sqrt{1-t^2}}\ \mathrm{d}t$ converge.
2. Montrer que pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, l'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{P(t)}{\sqrt{1-t^2}}\ \mathrm{d}t$ converge.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que l'application définie sur $\mathbb{R}_n[X]^2$ par
$$\forall (P,Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2, \quad \langle P, Q\rangle = \int_{-1}^{1} \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}\ \mathrm{d}t$$
est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.
4. On définit la suite de polynômes (polynômes de Tchebychev de première espèce)
$$T_0 = 1, \quad T_1 = X, \quad \forall k \in \mathbb{N},\ T_{k+2} = 2XT_{k+1} - T_k.$$
Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $T_k(\cos(x)) = \cos(kx)$.
5. Montrer que la famille $(T_0, T_1, \dots, T_n)$ est une famille orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$.
6. Calculer $\|T_k\|$, pour tout $k \in [\![0,n]\!]$.

Soit $E = \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

1. On considère l'application définie sur $E \times E$ par :
$$\forall (A,B) \in E^2, \quad \langle A, B\rangle = \mathrm{tr}(A\ {}^tB).$$
Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur E.
2. (a) On pose $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer l'orthogonal de J.
   (b) Soit F le sous-espace vectoriel engendré par J. Soit $A = (a_{i,j})$ une matrice de E. On note A' le projeté orthogonal de A sur F, et A'' son projeté orthogonal sur $F^{\perp}$. Déterminer A' et A''.
   (c) Application : déterminer les projetés orthogonaux sur F et $F^{\perp}$ de la matrice I_3.