Soient a et b deux réels, tels que $a < b$, $f$une fonction continue strictement positive sur $[a, b]$. On définit sur $\mathbb{R}[X]$ un produit scalaire par :

$$\forall (P, Q) \in (\mathbb{R}[X])^2, \quad \langle P, Q \rangle = \int_a^b f(t)P(t)Q(t)\ \mathrm{d}t.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note aussi $\langle \cdot, \cdot \rangle$ la restriction de ce produit scalaire à $\mathbb{R}_n[X]$. Soit $\mathcal{B} = (P_0, \dots, P_n)$ la base orthonormale construite pour le produit scalaire précédent à partir de la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ par le procédé d'orthonormalisation de Schmidt.

1. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\deg P_k = k$.
2. (a) Soit $i \geqslant 1$, $k \in \mathbb{N}$. En considérant le produit scalaire $\langle XP_i, P_k \rangle$, montrer que $XP_i \in \mathrm{Vect}\{P_{i-1}, P_i, P_{i+1}\}$.
   (b) En déduire l'existence de 3 suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)n \in \mathbb{N}$ et $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que :
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n P_n + (b_n - X)P_{n+1} + c_n P_{n+2} = 0.$$
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Du calcul de $\langle P_n, P_0 \rangle$, déduire que P_n possède au moins une racine d'ordre impair dans $]a, b[$.
4. Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ les racines d'ordre impair de P_n, appartenant à $]a, b[$ et $Q = \prod_{i=1}^{r} (X - \alpha_i)$. Montrer que $\langle P_n, Q \rangle \neq 0$, et en déduire que P_n possède n racines d'ordre 1 dans $]a, b[$.

Composée de deux projecteurs orthogonaux

Soit E un espace vectoriel euclidien et F un sev de E. On note p_F la projection orthogonale sur F.

1. (a) Montrer que $F = \{x \in E,\ \|p_F(x)\| = \|x\|.\}$.
   (b) Montrer que p_F est un endomorphisme symétrique.
2. Soient F et G deux sev de E, et p_F et p_G les projections orthogonales respectivement sur F et G. On suppose dans cette question que $p_F \circ p_G$ est la projection orthogonale sur un sev H.
   (a) Montrer que $H = F \cap G$.
   (b) Montrer que $p_F \circ p_G = p_G \circ p_F$.
3. On suppose dans cette question que p_F et p_G commutent.
   (a) Montrer que $G = (F \cap G) \oplus (F^\perp \cap G)$.
   (b) Montrer que $p_F \circ p_G$ est la projection orthogonale sur $F \cap G$.
4. On suppose que F et G sont deux droites vectorielles. Montrer que $p_F \circ p_G$ est une projection orthogonale non nulle si et seulement si $F = G$.
5. On suppose que G est une droite vectorielle. Donner une condition nécessaire et suffisante simple pour que $p_F \circ p_G$ soit une projection orthogonale non nulle.

Exercice 1

Soit $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 5 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 5 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$

1. A est-elle diagonalisable ?
2. Determiner une matrice orthogonale P telle que ${}^tPAP$ est diagonale.

Exercice 2

Soit $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ une matrice orthogonale. Montrer que :

$$\left| \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j} \right| \leqslant n \leqslant \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} |a_{i,j}| \leqslant n\sqrt{n}.$$