Exercice 1 – **Décomposition d'une matrice en valeurs singulières**
Soit $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$. On identifie $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ avec $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^p$. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

1. Montrer que ${}^tAA = 0 \iff A = 0$. *Dans la suite, on suppose que* $A \neq 0$.
2. (a) Montrer que les matrices ${}^tAA$ et $A\,{}^tA$ sont diagonalisables.
   (b) Montrer que les valeurs propres de ${}^tAA$ sont réelles, positives ou nulles.
3. Soit $(V_1, \dots, V_p)$ une base orthonormée de vecteurs propres de ${}^tAA$ respectivement associées aux valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_p$, rangées telles que $\lambda_1 \geqslant \dots \geqslant \lambda_p$.
   (a) Montrer que $\lambda_1 > 0$.
   Soit $r = \max\{i \in [\![1,p]\!], \lambda_i > 0\}$. En particulier, $V_{r+1}, \dots, V_n \in \operatorname{Ker}({}^tAA)$.
   (b) Montrer : $\operatorname{Ker} A = \operatorname{Ker}({}^tAA)$, $\operatorname{Ker}({}^tA) = (\operatorname{Im} A)^\perp$, $\operatorname{rg}({}^tAA) = \operatorname{rg}(A\,{}^tA)$.
   (c) Montrer que $r \leqslant n$ et que $\dim \operatorname{Ker}(A\,{}^tA) = n - r$.
   Pour $i \in [\![1,r]\!]$, on pose $\beta_i = \sqrt{\lambda_i}$, $U_i = \frac{1}{\beta_i} AV_i$, et si $r < n$, on note $(U_{r+1}, \dots, U_n)$ une base orthonormale de $\operatorname{Ker}(A\,{}^tA)$.
   (a) Montrer que :
   $$\forall i \in [\![1,r]\!],\ {}^tAU_i = \beta_i V_i, \quad \forall i \in [\![r+1,p]\!],\ AV_i = 0, \quad \forall i \in [\![r+1,n]\!],\ {}^tAU_i = 0.$$
4. On note V la matrice dont les colonnes sont $V_1, \dots, V_p$, et u la matrice dont les colonnes sont $U_1, \dots, U_n$. Calculer $\Delta = {}^tUAV$ et en déduire l'expression de A en fonction de Δ, U et V (décomposition de A en valeurs singulières).

Exercice 2 – Soit n un entier supérieur ou égal à 3. Soit $f_n : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ l'application définie pour tout $x \in [0, +\infty[$ par $f_n(x) = x^n - nx + 1$.

1. Prouver l'existence de deux racines α_n et β_n de f_n telles que $0 < \alpha_n < 1 < \beta_n$.
2. Montrer que $(\alpha_n)_{n\geqslant 3}$ converge et calculer sa limite.
3. Montrer que $\alpha_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$.
4. (a) Montrer que pour tout $n \geqslant 3$, $f_n\left(1 + \dfrac{2}{\sqrt{n}}\right) \geqslant n$.
   (b) En déduire un encadrement de $(\beta_n)_{n\geqslant 3}$ et sa limite ℓ.
   (c) En remarquant que pour tout $n \geqslant 3$, $n \ln(\beta_n) = \ln(n\beta_n - 1)$, trouver un équivalent de $\ln(\beta_n)$, et en déduire que $\beta_n - \ell \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\ln n}{n}$.

Exercice 3 – Expliciter, puis donner un équivalent simple de la suite définie par $w_0 = 1$, $w_1 = 0$, $w_2 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$,
$$\forall n \in \mathbb{N},\ w_{n+3} = 6w_{n+2} - 11w_{n+1} + 6w_n + a,$$
lorsque $a = 0$. Même question lorsque $a = 2$.

Exercice 4 – Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = a > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{\sqrt{1+u_n^2}}$.

1. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
2. Soit, pour tout $n \geqslant 1$, $w_n = \dfrac{1}{u_n^2} - \dfrac{1}{u_{n-1}^2}$. Calculer w_n pour tout $n \geqslant 1$.
3. En calculant $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} w_k$ de deux manières différentes, déterminer la limite de $(nu_n^2)_{n\in\mathbb{N}}$, et en déduire un équivalent simple de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 5 – Expliciter, puis donner un équivalent simple de la suite définie par $u_0 = 0$ et
$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 3u_n + v_n$$
lorsque $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = 4$. Même question lorsque $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = 2n + 2$.