Exercice 1 – Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$, et $u_n = \frac{S_n}{\sqrt{n}}$, et $v_n = S_n - 2\sqrt{n}$.

1. Montrer que pour tout $n > 0$, $S_n \leqslant \sqrt{n} + \sqrt{n-1}$.
2. Montrer que pour tout $n > 0$, $2\sqrt{n+1} - 2 \leqslant S_n$.
3. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergent. Déterminer la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, et justifier que la convergence est en $O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$.
4. En déduire un équivalent simple de $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ en $+\infty$, puis une expression de S_n à $o(1)$ près en fonction de la limite α de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Exercice 2 – Soit n un entier supérieur ou égal à 3. Soit $f_n : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ l'application définie pour tout $x \in [0, +\infty[$ par $f_n(x) = x^n - nx + 1$.

1. Prouver l'existence de deux racines α_n et β_n de f_n telles que $0 < \alpha_n < 1 < \beta_n$.
2. Montrer que $(\alpha_n)_{n\geqslant 3}$ converge et calculer sa limite.
3. Montrer que $\alpha_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$.
4. (a) Montrer que pour tout $n \geqslant 3$, $f_n\left(1 + \frac{2}{\sqrt{n}}\right) \geqslant n$.
   (b) En déduire un encadrement de $(\beta_n)_{n\geqslant 3}$ et sa limite ℓ.
   (c) En remarquant que pour tout $n \geqslant 3$, $n\ln(\beta_n) = \ln(n\beta_n - 1)$, trouver un équivalent de $\ln(\beta_n)$, et en déduire que $\beta_n - \ell \underset{+\infty}{\sim} \frac{\ln n}{n}$.

Exercice 3 – Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à termes positifs, et

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n = \frac{1}{n}(u_n + u_{n+1} + \cdots + u_{2n-1}).$$

Montrer que $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

Exercice 4 – Étude de la suite définie par :

$$u_0 \neq -5, \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{4u_n + 2}{u_n + 5}$$