Exercice 1 – Deux pièces de monnaies déséquilibrées amènent pile avec des probabilités respectives de p et q contenus dans $]0,1[$. Au départ, on choisit une des deux pièces au hasard. On joue infiniment à pile ou face avec la règle suivante : si on obtient pile, on garde la même pièce. Si on obtient face, on change de pièce.

1. Probabilité qu'on joue le deuxième lancer avec la pièce 1 ?
2. Sachant qu'on a joué le 2e lancer avec la pièce 1, quelle est la probabilité de jouer le 4e lancer avec la pièce 2 ?
3. On joue le 2e lancer avec la pièce 1. Quelle est la probabilité que le premier lancer ait été effectué avec la pièce 2 ?
4. Probabilité pour qu'on joue avec la pièce 1 au n-ième lancer pour la première fois. Somme de ces probabilité ? Que signifie ce résultat ?

Exercice 2 – Un ascenseur dessert n étages d'un immeuble. À chaque voyage, le nombre de personnes qui montent dans l'ascenseur au rez-de-chaussée est une v.a.r. suivant une loi de Poisson de paramètre λ. On émet les hypothèses suivantes :

- Aucun arrêt n'est dû à des personnes désirant monter dans l'ascenseur à un autre niveau que le rez-de-chaussée.
- Chaque personne choisit son étage au hasard et indépendamment des autres passagers. Ces choix se font dans l'ordre d'entrée des passagers dans l'ascenseur.

On note S le nombre d'arrêts de l'ascenseur lors d'un voyage donné (on ne compte pas l'arrêt initial au rez-de-chaussée)

1. Soit $k \in \mathbb{N}$ et $\ell_i n[\![1,n]\!]$. Montrer que :
$$P(S=j \mid X=k+1) = \frac{j}{n}P(S=j \mid X=k) + \frac{n-j+1}{n}P(S=j-1 \mid X=k).$$
2. Après avoir justifié l'existence des espérances conditionnelles, montrer que
$$E(S \mid X=k+1) = 1 + \left(1-\frac{1}{n}\right)E(S \mid X=k).$$
3. Déterminer, pour tout entier naturel k, l'espérance de S sachant que $X=k$.
4. En déduire que $E(S) = n\left(1-\mathrm{e}^{\frac{\lambda}{n}}\right)$

Exercice 3 – Soit $p \in]0,1[$, $q = 1-p$, et soit X, Y et Z trois v.a.r. discrètes mutuellement indépendantes suivant la loi $\mathcal{J}(1,p)$, c'est-à-dire $X(\Omega) = \mathbb{N}$, et pour tout $k \in \mathbb{N}$, $p(X=k) = pq^k$, et de même pour Y et Z. Calculer $P(X=Y)$, $P(X \geqslant 2Y)$, $P(X+Y \leqslant Z)$.

Exercice 4 – Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère une urne contenant $2n$ boules, dont n sont blanches, et n sont rouges. On tire au hasard, une à une et sans remise toutes les boules de l'urne. À chaque tirage, à partir du deuxième, si la boule tirée est de couleur différente de celle obtenue au tirage précédent, on gagne un euro. On note G la v.a.r. égal au gain total en euros à l'issue des 2n tirages.

1. Déterminer $G(\Omega)$. Déterminer les probabilités des événements $[G=0]$, $[G=1]$, $[G=2]$, $[G=2n-1]$.
2. Soit $k > 1$. On note X_k la variable aléatoire prenant la valeur 1 si on gagne un euro au k-ième tirage, et 0 sinon.
   (a) Déterminer la loi de X_k, calculer $E(X_k)$ et $V(X_k)$.
   (b) Déterminer $E(G)$.