Lycée La Bruyère, Versailles — Lundi 1er décembre 2008

ECS 2 – Mathématiques

Nom : Prénom :

Interrogation n° 2 – V.A.R.D., intégrales impropres. (30 minutes)

Note sur 40 :	Observations :
Note sur 20 :	
Rang :	

1. Donner la formule de l'espérance totale (sans démonstration)

2. Définition de la convergence et de la divergence d'une intégrale impropre d'une fonction continue sur $[a, b[$. Cas d'une fonction continue sur $]a, b[$.

3. Vrai ou faux ? (Donner un contre-exemple si l'énoncé est faux, une justification si l'énoncé est vrai ; toute réponse donnée sans contre-exemple ou justification sera considérée comme fausse)
   Dans toutes les questions, f est une fonction continue sur $[a, b[$.

   (a) Si $\lim\limits_{x \to b} f(x) = +\infty$, alors l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ diverge.

   (b) Si $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ diverge et $b \neq +\infty$, alors $\lim\limits_{x \to b} f(x) = +\infty$.

   (c) Si $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ diverge, $b \neq +\infty$, et si f est positive sur $[a, b[$, alors $\lim\limits_{x \to b} f(x) = +\infty$.

   (d) Si f n'admet pas de limite en $b = +\infty$, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ diverge.

4. Soit a et b deux entiers positifs ou nuls. On appelle chemin monotone de $(0,0)$ vers (a,b) une succession de pas de longueur 1 vers la droite ou vers le haut, de point de départ $(0,0)$ et de point d'arrivée (a,b).

   (a) Soit $(a,b) \in \mathbb{N}^2$. Quel est le nombre de chemins monotones de $(0,0)$ à (a,b) ?

   (b) On suppose que l'on dispose de x couleurs différentes pour colorier les pas à droite, et y couleurs pour les pas montants. Combien y a-t-il de chemins coloriés de $(0,0)$ à (a,b) ?

   (c) En comptant de deux manières différentes les chemins coloriés de longueur n, retrouver la formule du binôme pour $(x+y)^n$, dans le cas où x et y sont entiers positifs.

5. Déterminer a pour que les égalités $p(X=n) = \dfrac{a(n+3)}{2^n}$, $n \in \mathbb{N}$ définissent une loi de probabilité. Calculer son espérance, son moment d'ordre 2, sa variance.

6. Déterminer la nature et le cas échéant la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{Arctan} \mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}} \, \mathrm{d}x$.