Programme des colles de la semaine 10 (01/12 – 06/12)

I. Compléments sur les sommes simples et doubles de familles dénombrables : voir semaine 9

II. V.A.R.D. : révisions et compléments : voir semaine 9

III. Intégrales impropres.

1. Définitions.
   (a) Cas d'une fonction continue sur $[a, b[$ (ou $]a, b]$)
   Caractérisation de la convergence par l'existence de la limite d'une primitive quelconque ; valeur de l'intégrale.
   (b) Cas d'une fonction continue sur $]a, b[$
   (c) Cas d'une fonction continue sur $[a, b] \setminus \{a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b\}$.
   (d) Exemple important (à connaître comme un thm) :
   Nature des séries de Riemann en $\pm\infty$, en 0. Nature des séries de Riemann centrées en $b \in \mathbb{R}$.
2. Propriétés des intégrales impropres
   (a) Linéarité de l'intégrale impropre
   - CL d'intégrales convergentes
   - Somme d'une intégrale convergente et d'une intégrale divergente
   - Somme de deux intégrales divergentes : exemple et contre-exemple

   (b) Relation de Chasles pour les intégrales impropres
   (c) Positivité de l'intégrale impropre.
   - Si f continue sur $[a, b[$, $f \geqslant 0$, et si l'intégrale converge, alors $\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t \geqslant 0$.
   - Cas d'égalité ssi $f = 0$
   - Si f, g continues sur $[a, b[$, $f \leqslant g$, et si les intégrales convergent, alors $\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t \leqslant \int_a^b g(t)\ \mathrm{d}t$.
   - Cas d'égalité ssi $f = g$.

Fin du programme de colles pour les colles du lundi 01/12

3. Critères de comparaison pour les intégrales de *fonctions positives*

   Peu ou pas d'exercices auront été traités avant les colles de cette semaine.

   (a) CNS de convergence d'intégrales de fonctions positives, par majoration des intégrales partielles
   (b) Comparaison par inégalités
   (c) Comparaison par négligeabilité
   (d) Comparaison par équivalence
   (e) Exemple : les intégrales de Bertrand $\displaystyle\int \frac{1}{t^\alpha (\ln t)^\beta}\ \mathrm{d}t$ ont été étudiées exhaustivement pour la borne 0 et la borne $+\infty$. Le résultat lui-même est hors-programme
   (f) Aucune « méthode » spécifique n'est au programme. Nous avons mis en oeuvre à plusieurs reprises dans des exemples la méthode de comparaison à une série de Riemann consistant à étudier la limite de $t^\alpha f(t)$ ou $(t - b)^\alpha f(t)$. Les élèves doivent se diriger spontanément vers cette méthode dans les cas les plus évidents, et doivent savoir la mettre en oeuvre de manière rigoureuse.
4. Cas des intégrales de fonctions non positives
   - Notion de convergence absolue
   - Une intégrale absolument convergente est convergente.
   - Inégalité triangulaire pour les intégrales absolument convergentes.
   - Nous ne disposons pas au programme de résultats spécifiques à l'étude de la semi-convergence. Toute étude de ce type devra être détaillée.