**Programme des colles de la semaine 13 (12/01 – 17/01)**

## I. Vecteurs aléatoires :

1. Loi d'un couple aléatoire discret (voir semaine 12)
2. Indépendance de v.a.r.d. (voir semaine 12)
3. Étude de $g(X,Y)$ (voir semaine 12)
4. Covariance (voir semaine 12 et ajouts ci-dessous) :
   - Expression de $V(X_1+\cdots+X_n)$ en général ; cas où les $X_i$ sont deux à deux indépendants.
   - Inégalité de type Cauchy-Schwarz : $\operatorname{cov}(X,Y)^2 \leqslant V(X)V(Y)$
   - Coefficient de corrélation.
   - Inégalité $|\rho_{X,Y}| \leqslant 1$. Interprétation du cas d'égalité.
   - Matrice des variances-covariances.
   - Calcul de la covariance de 2 CL des $X_i$ à l'aide de la matrice des variances-covariances. Calcul de la variance d'une CL des $X_i$.
5. Stabilité des lois classiques.
   Les démonstrations n'ont pas été refaites cette année.
   - Stabilité des lois binomiales, pour une somme de variables **indépendantes**.
   - Stabilité des lois de Poisson, pour une somme de variables **indépendantes**
   - Stabilité des lois de Pascal et des lois binomiales négatives (hors-programme, seul l'énoncé a été donné ; la démonstration a été laissée en exercice)

## II. V.A.R. à densité

Nous n'aurons fait que le cours en début de semaine. Les seuls exercices pouvant être donnés cette semaine sur ce chapitre doivent rester très proches du cours, par exemple :

- Vérifier qu'une loi définie par une fonction de répartition est la loi d'une v.a.r. à densité, et calcul d'une densité ;
- Vérifier qu'une fonction est une densité ;
- (à partir de mercredi seulement) Déterminer la fonction de répartition et une densité de $aX+b$, $X^2$ ou $|X|$ connaissant une densité ou la fonction de répartition de $X$. On pourra éventuellement considérer d'autres fonctions de $X$, à condition que les raisonnements des cas précédents s'adaptent strictement au cas considéré.

1. Fonctions de répartition et densités
   - Rappel : CNS pour qu'une fonction soit la fonction de répartition d'une v.a.r.
   - Définition : une v.a.r. est dite *à densité* si sa fonction de répartition est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ presque partout (c'est-à-dire sur tout $\mathbb{R}$ sauf un nombre fini de points).
     Suivant en cela le programme, on ne pose pas de condition de dérivabilité à gauche et à droite en tout point.
   - Définition : Densité d'une v.a.r. à densité : $f$ presque partout égale à $F_X$ et positive partout.
   - Non unicité d'une densité : il existe une infinité de densités de $X$, obtenue à partir d'une densité particulière en modifiant un nombre fini de valeurs de sorte à garder la positivité.
   - Abus de notation $f_X$.
   - Proposition : pour tout $x \in X(\Omega)$, $P(X=x)=0$
   - Signification de la densité : pour presque tout x de $\mathbb{R}$,
     $$f(x)\cdot h \underset{h\to 0}{\sim} P(x \leqslant X \leqslant x+h)$$
     $f(x)$ est donc à peu près égal au rapport entre la probabilité d'obtenir une valeur dans un petit intervalle contenant $x$ et la longueur de cet intervalle. Ainsi, plus la densité $f(x)$ est grande (relativement aux autres valeurs), plus la probabilité d'obtenir une valeur « proche » de $x$ est élevée.
   - Exemples :
     * Exemple d'une variable à densité $X$ ; calcul d'une densité ;
     * Les v.a.r.d. ne sont pas à densité.
     * Exemple d'une v.a.r.d. tq $X(\Omega)$ est infini non dénombrable, et qui ne soit pas à densité ($F_X$ non continue)
     * Exemple d'une v.a.r. à densité, de densités non bornées.
   - Lemme : Relation intégrale entre une densité et la fonction de répartition : pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,\mathrm{d}t$ converge, et
     $$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,\mathrm{d}t.$$
   - CNS pour qu'une fonction $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ soit une densité : $f \geqslant 0$, continue presque partout, et telle que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 1$ (cette égalité sous-entend la convergence de l'intégrale).
   - Expression de $P(X\leqslant a)$, $P(X \geqslant a)$, $P(a \leqslant X \leqslant b)$, et expressions similaires avec des inégalités strictes, à l'aide d'intégrales d'une densité.
2. Fonction de répartition et densité de $\varphi(X)$ dans des cas simples.
   Les résultats suivants ne doivent pas être utilisés tels quels, mais doivent être établis à chaque fois.
   - Cas de $Y = aX+b$, $a \neq 0$.
     Si $a>0$, pour tout $y$ de $\mathbb{R}$, $F_Y(y) = F_X\left(\frac{y-b}{a}\right)$.
     Si $a<0$, pour tout $y$ de $\mathbb{R}$, $F_Y(y) = 1 - F_X\left(\frac{y-b}{a}\right)$.
     Dans les deux cas, une densité est donnée, pour tout $y$ de $\mathbb{R}$, par $f_Y(y) = \frac{1}{|a|} f_X\left(\frac{y-b}{a}\right)$.
   - Cas de $Y = |X|$ :
     Pour tout $y$ de $\mathbb{R}$, $F_Y(y) = F_X(y) - F_X(-y)$ ;
     Une densité est donnée, pour tout $y$ de $\mathbb{R}$, par $f_Y(y) = f_X(y) - f_X(-y)$.
   - Cas de $Y = X^2$ :
     Pour tout $y$ de $\mathbb{R}$, $F_Y(y) = F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y})$ ;
     Une densité est donnée, pour tout $y$ de $\mathbb{R}$, par $f_Y(y) = \frac{1}{2\sqrt{x}}\left(f_X(\sqrt{y}) - f_X(-\sqrt{y})\right)$.

   Le seul résultat général à ce sujet au programme est le cas où $\varphi$ est de classe $\mathcal{C}^1$, strictement croissante et de dérivée presque partout non nulle. Ce résultat n'a pas encore vu en cours et ne pourra pas être demandé cette semaine.