Lycée La Bruyère, Versailles 2008/2009
ECS 2 – Mathématiques

Programme des colles de la semaine 14 (19/01 – 24/01)

I. Vecteurs aléatoires : reprise complète (voir semaines 12 et 13)

II. V.A.R. à densité

1. **Fonctions de répartition et densités : généralités** (voir semaine 13)
2. **Fonction de répartition et densité de $\varphi(X)$.**
   - Cas de $|X|$, X^2, $aX+b$ (voir semaine 13)
   - Premier théorème de transfert : cas de φ de classe $\mathcal{C}^1$, strictement croissante, de dérivée strictement positive presque partout. En particulier, dans ce cas, $\varphi(X)$ est une va à densité.
   - Exemples, notamment $\exp(X)$.
   - Un exemple de X à densité et de φ tels que $\varphi(X)$ ne soit pas à densité.
3. **Espérance d'une va à densité** X, de densité f
   - Définition, condition d'existence.
   - Exemples de X admettant une espérance, n'en admettant pas.
   - Remarque : la convergence de l'intégrale définissant $E(X)$ équivaut à sa CVA.
   - Remarque : le seul défaut de CV de cette intégrale est en $+\infty$ ou $-\infty$, elle est nécessairement convergente aux autres points, par comparaison avec $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ qui converge.
   - Proposition : si $X(\Omega)$ est borné, alors X admet une espérance.
   - Proposition : positivité de $E(X)$.
   - Proposition : si f est paire, et si X admet une espérance, alors $E(X)=0$.
4. **Espérance de $\varphi(X)$.**
   - Théorème (admis) : second théorème de transfert : $E(\varphi(X))$, pour φ continue sur un intervalle I contenant $X(\Omega)$.
     Le résultat général est admis conformément au programme. Tout aussi conformément au programme, la démonstration dans le cas où φ est de classe $\mathcal{C}^1$ et de dérivée strictement positive a été vue.
   - Remarque : l'énoncé général nous fait sortir du cadre des va à densité.
   - Proposition : Si X admet une espérance, alors pour tous réels a et b, $aX+b$ admet une espérance, et $E(aX+b)=aE(X)+b$.
5. **Moments d'ordre 2**
   - Définition et condition d'existence de $M_2(X)$, moment d'ordre 2 (par intégrales) ; $M_2(X) = E(X^2)$
   - Définition des moments d'ordre n.
   - Définition et condition d'existence de $V(X)$: X admet une variance ssi X admet une espérance et $(X-E(X))^2$ admet une espérance ; dans ce cas, $V(X)=E((X-E(X))^2)$.
   - Expression intégrale de $V(X)$ d'après le théorème de transfert.
   - Positivité de $M_2(X)$ et $V(X)$.
   - Proposition : si X admet un moment d'ordre 2, alors X admet une espérance.
   - X admet une variance ssi X admet un moment d'ordre 2.
   - Formule de König-Huygens
   - Écart-type.
   - Si X admet une variance, alors $aX+b$ aussi, et $V(aX+b)=a^2V(X)$, $\sigma(aX+b)=|a|\sigma(X)$.
6. **Variables centrées, réduites**
   - Définitions.
   - Variable centrée réduite associée à une variable X. Notation X^*.
7. **Étude de $X+Y$**
   - Notion d'indépendance de va à densité (ou plus général)
   - Densité d'une somme :
     Théorème **(admis)** : si X et Y sont à densité, et indépendantes, et si le produit de convolution g de f_X et f_Y est continu pp, alors $X+Y$ est à densité, de densité g. C'est le cas si f_X ou f_Y est borné.
   - Théorème **(admis)**. Soit X et Y des variables aléatoires quelconques (pas forcément à densité) pour lesquels on a une espérance (obtenue par exemple par le théorème de transfert, pour une va qui n'est pas à densité). Alors $X+Y$ admet une espérance et $E(X+Y)=E(X)+E(Y)$.
   - Idée de la démonstration de ce théorème lorsque X et Y sont indépendants, et que le produit de convolution définit une densité de $X+Y$. Nous avons admis les interversions de signes $\int$.
   - Théorème **(admis)** Soit X et Y deux va indépendantes quelconques (pas forcément à densité) admettant une variance. Alors $X+Y$ admet une variance et $V(X+Y)=V(X)+V(Y)$.
   - Théorème : Sous les mêmes hypothèses d'indépendance et d'existence des variances, X et Y étant à densité, $E(XY)=E(X)E(Y)$.
   - Pas de notion de covariance au programme d'ECS pour les va à densité.

Les lois classiques n'ont pas encore été vues ; elles feront l'objet d'un prochain chapitre