Lycée La Bruyère, Versailles 2008/2009
ECS 2 – Mathématiques

Programme des colles de la semaine 15 (26/01 – 31/01)

I. V.A.R. à densité : voir semaines 13 et 14

II. Lois continues classiques

1. **Loi uniforme**
   (a) Définition
   - Définition par une densité. Notation $X \hookrightarrow \mathcal{U}[a,b]$.
   - Description de la fonction de répartition.
   - Si $a \leqslant \alpha < \beta \leqslant b$, expression de $P(X \in [\alpha,\beta])$.

   (b) Moments
   Soit $X \hookrightarrow \mathcal{U}[a,b]$. Alors X admet E et V, et $E(X) = \frac{a+b}{2}$, et $V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$.
   - Loi de $Y = \alpha X + \beta$, lorsque $X \hookrightarrow \mathcal{U}[a,b]$, en discutant suivant le signe de $\alpha \neq 0$.
   - $X \hookrightarrow \mathcal{U}[0,1]$ ssi $Y = a + (b-a)X \hookrightarrow \mathcal{U}[a,b]$.

2. **Loi exponentielle**
   (a) Définition
   - $f : x \mapsto \lambda e^{-\lambda x}$, $\lambda > 0$, sur $\mathbb{R}_+$, nulle sur $\mathbb{R}_-^*$. La fonction f est une densité de probabilité.
   - Cette densité définit la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. Notation $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$.
   - Expression de la fonction de répartition.
   - Courbe représentative de f, de F_X.
   - Si $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$, alors $\frac{X}{\mu} \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda\mu)$.

   (b) Moments
   - Soit $X \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$. Alors X admet une espérance et une variance, et $E(X) = 1$, $V(X) = 1$.
   - Soit $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$, alors X admet une espérance et une variance, et $E(X) = \frac{1}{\lambda}$, $V(X) = \frac{1}{\lambda^2}$.

   (c) Caractérisation par l'absence de mémoire
   - On dit que X (va quelconque) suit une loi sans mémoire ssi X est positive, et pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}_+^2$, $P(X > x+y) = P(X > x)P(X > y)$.
   - Soit X une va quelconque. Alors X suit une loi sans mémoire si et seulement si, soit $X = 0$ presque sûrement, soit X suit une loi exponentielle.

3. **Lois Γ et γ**
   (a) Définition
   - $(b,\nu) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$. Densité $f : x \mapsto \frac{x^{\nu-1}}{\Gamma(\nu)b^\nu} e^{-\frac{x}{b}}$ sur $\mathbb{R}_+^*$, nulle sur $\mathbb{R}^-$. Notation $X \hookrightarrow \Gamma(b,\nu)$.
   - Loi gamma-standard de paramètre ν : $\gamma(\nu) = \Gamma(1,\nu)$.
   - Car particulier $\nu = 1$: $\Gamma(b,1) = \mathcal{E}(\frac{1}{b})$.
   - $X \hookrightarrow \Gamma(b,\nu) \iff b'X \hookrightarrow \Gamma(bb',\nu)$
   - En particulier, $X \hookrightarrow \gamma(\nu) \iff bX \hookrightarrow \Gamma(b,\nu)$.

   (b) Étude de la densité
   Cas b=1 (loi gamma-standard)
   - Si $\nu \in]0,1[$, $\lim_{0^+} f = +\infty$.
   - Si $\nu = 1$, $\lim_{0^+} f = 1$, c'est une loi exponentielle, déjà étudiée.
   - Si $\nu \in]1,2[$, f est continue en 0 et admet un demi-tangente verticale à droite en 0.
   - Si $\nu = 2$, f est continue en 0, et admet une demi-tangente à droite en 0 d'équation $y = x$
   - Si $\nu > 2$, f est continue en 0, et y admet une tangente horizontale.

   Effet du paramètre b :
   - Affinité horizontale de rapport b (on étire la courbe lorsque b devient grand, donc la répartition est plus étalée)
   - Affinité verticale de rapport $\frac{1}{b}$ (la courbe est aplatie lorsque b devient grand)

   (c) Moments
   - Soit $X \hookrightarrow \gamma(\nu)$. Alors X admet une espérance et une variance, et $E(X) = \nu$, $V(X) = \nu$.
   - Soit $X \hookrightarrow \Gamma(b,\nu)$. Alors X admet E et V, et $E(X) = b\nu$, $V(X) = b^2\nu$.

   (d) Stabilité par somme
   - Soit X, Y indépendantes, $X \hookrightarrow \Gamma(b,\nu)$, $Y \hookrightarrow \Gamma(b,\nu')$. Alors $X + Y \hookrightarrow \Gamma(b, \nu+\nu')$
   - Il est important de savoir refaire la démonstration du résultat ci-dessus, car elle est souvent redemandée en problème.
   - Cas de $X_1 + \ldots + X_n$.
   - Cas de la somme de n variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant des lois exponentielles de même paramètre λ.

   (e) L'étude spécifique (et le nom) des autres cas particuliers de la loi Gamma (loi d'Erlang, loi du khi-deux...) n'est pas au programme, mais peut faire l'objet d'exercices ou problèmes.

4. **Loi normale, ou loi de Laplace-Gauss, ou loi gaussienne**
   (a) Définition
   - Rappel : intégrale de Gauss.
   - $(m,\sigma) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$, densité $f_{m,\sigma} : x \mapsto \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$.
   - Notation, conformément au programme : $\mathcal{N}(m,\sigma^2)$; autre notation fréquente : $\mathcal{N}(m,\sigma)$.
   - Cas particulier de la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$.
   - Stabilité par transformation affine : si $X \hookrightarrow \mathcal{N}(m,\sigma^2)$, alors $aX+b \hookrightarrow \mathcal{N}(am+b,(a\sigma)^2)$.
   - En particulier, $X \hookrightarrow \mathcal{N}(m,\sigma^2) \iff \frac{X-m}{\sigma} \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$.

   (b) Étude de la densité et de la fonction de répartition.
   - Densité de la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$
     * Variations et parité.
     * Points d'inflexion en -1 et 1. Étude de la convexité.
     * Les tangentes aux points d'inflexions en -1 et en 1 passent respectivement par les points $(-2,0)$ et $(0,2)$.
   - Influence des paramètres m et σ sur la densité
     * σ donne une affinité horizontale de rapport σ et une affinité verticale de rapport $\frac{1}{\sigma}$ (plus σ est grand, plus la courbe s'étale, donc moins la variable est concentrée)
     * l'effet de m est une translation horizontale de m (la courbe est centrée au point d'abscisse m).
   - Fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.
     * Notation $\Phi = \Phi_{(0,1)}$
     * Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$. Imparité de $\Phi - \frac{1}{2}$.
     * Étude des points d'inflexion et de la convexité.
   - Lecture de la table de valeurs de Φ (cas de la loi normale centrée réduite) :
     Savoir déterminer $\Phi(x)$, ou dans l'autre sens, savoir déterminer x tel que $\Phi(x) = p$, éventuellement :
     * en utilisant la relation $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$ pour $x < 0$, ou $p < \frac{1}{2}$;
     * par interpolation linéaire, si x (ou p) n'est pas directement dans le tableau.

Nous n'avons pas encore vu le calcul de l'espérance et de la variance de variables suivant des lois normales, ainsi que la stabilité par somme.

Nous n'avons pas traité beaucoup d'exercices en classe.