Programme des colles de la semaine 17 (09/02 – 14/02)

I. V.A.R. à densité et lois continues classiques : voir semaines 13, 14, 15, 16

II. Rappels de topologie (voir semaine 16)

III. Fonctions de plusieurs variables réelles

Note aux colleurs : Pas encore d'étude d'extremums cette semaine. D'autre part, peu d'exercices auront été traités en cours avant lundi. Enfin, notez que la notion de différentielle n'est pas au programme

1. **Graphe**
   - Définition du graphe, exemples
   - Courbes de niveau.
2. **Limites**

   La notion de limites de fonctions de plusieurs variables n'apparaît pas explicitement dans le programme, mais est bien utile pour l'étude de la continuité. C'est pour cela qu'on l'a évoquée, sans rentrer dans les détails.
   - Notion d'adhérence d'un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$.
   - Définition par ε, dans le cas d'une limite finie
   - Adaptation à une limite infinie laissée aux élèves
3. **Continuité**

   (a) Généralités
   - Définition par propriétés équivalents (par ε, par existence de la limite, par voisinages)
   - Théorème d'encadrement pour la continuité.
   - Continuité de $X \mapsto \|X - X_0\|^\alpha$ sur $\mathbb{R}^n$, $\alpha > 0$.
   - Principe : continuité par majoration de $|f(X) - f(X_0)|$ par $\beta\|X - X_0\|^\alpha$, $\alpha > 0$.
   - Lemme important : $X = (x_1, \dots, x_n)$, alors pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $|x_i| \leqslant \|X\|$.
   - Les projections pr_i de $\mathbb{R}^n$ sur le i-ième facteur sont continues sur $\mathbb{R}^n$.

   (b) Critère séquentiel
   - Définition de la convergence d'une suite de vecteur.
   - Caractérisation séquentielle de la continuité de f en un point X de $\mathbb{R}^n$.

   (c) Opérations sur les fonctions continues.
   - si f et g sont continues en A, et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $f + \lambda g$ et fg sont continues en A, et, si $g(A) \neq 0$, $\frac{f}{g}$ est continue en A.
   - Continuité d'une composition de f continue en amont par une fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue.
   - Continuité d'une composition de f continue en aval par n fonctions continues de la même variable t (c'est-à-dire composition en aval par une fonction vectoriel $U : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$)
   - Exemple : les fonctions ne dépendant que d'une des variables, et continues en cette variable en tant que fonction d'une variable, sont continues en tant que fonction de n variable (composition par pr_i).
   - Exemple : les fonctions polynomiales de plusieurs variables sont continues.
   - Principe (vu en exercice) : (énoncé pour 2 variables, adaptez) pour prouver la non continuité de f en (x_0, y_0) :
     - il suffit de trouver u et v deux fonctions réelles de limites x_0 et y_0 en 0, et telles que $f(u(t), v(t))$ n'admette pas de limite en 0 ;
     - ou alors, il suffit de trouver u_1 et u_2 de limite x_0 en 0, v_1 et v_2 de limite y_0 en 0, et telles que $f(u_1(t), v_1(t))$ et $f(u_2(t), v_2(t))$ n'admettent pas la même limite lorsque t tend vers 0.

     Cas important souvent utilisés (en $(0,0)$) : $f(t, 0)$, $f(0, t)$, $f(t, t)$, $f(t, -t)$. L'examen rapide de ces cas devrait être quasiment systématique (au brouillon) avant de se diriger vers des arguments plus fins.

   (d) Continuité et topologie :
   - L'image réciproque d'un ouvert par une fonction définie et continue sur un ouvert est un ouvert.
   - L'image réciproque d'un fermé par une fonction définie et continue sur $\mathbb{R}^n$ est un fermé.
   - Exemple : les ensembles définis par des inégalités $\{f(X) \leqslant a\}$ ou $\{f(X) < a\}$. Les courbes de niveau. Les boules ouvertes et fermées.
   - Théorème (admis, conformément au programme). Toute fonction continue sur un sous-ensemble fermé et borné de $\mathbb{R}^n$ est bornée et atteint ses bornes.
4. **Calcul différentiel à l'ordre 1**

   (a) Généralités
   - Fonctions partielles, dérivées partielles,
   - Gradient, notation ∇f_A ou $\nabla f(A)$.
   - Fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ (continuité de toutes les dérivées partielles)

   (b) DL et formule de Taylor-Young
   - Notion de polynôme de plusieurs variables, degré
   - Définition d'un DL à l'ordre n. Seuls les DL à l'ordre 1 sont théoriquement au programme, mais certains calculs peuvent se simplifier à l'aide de DL à l'ordre plus important.
   - Plan tangent, hyperplan tangent.
   - Formule de Taylor-Young à l'ordre 1, pour f de classe $\mathcal{C}^1$ (à savoir exprimer aussi avec les dérivées partielles) ; au voisinage de A
   $$f(X) = f(A) + \langle X - A, \nabla f_A \rangle + o(\|X\|).$$
   - Corollaire : une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ est continue.
   - Réciproque à TY (hors programme, à savoir refaire) : si f admet un DL à l'ordre 1, alors f admet des dérivées partielles, données par les coefficients de ce DL.

   (c) Règles générales pour les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$
   - Somme, produit quotient de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$.
   - Composition en amont : $\nabla(g \circ f)(A) = g'(f(A))\nabla f(A)$, et caractère $\mathcal{C}^1$ préservé.
     À savoir exprimer avec les dérivées partielles.
   - Composition en aval, $U : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $(f \circ U)'(t_0) = \langle U'(t_0), \nabla f_{U(t_0)} \rangle$, et caractère $\mathcal{C}^1$ préservé.
     À savoir exprimer avec les dérivées partielles.
   - Dérivée directionnelle
   - Interprétation du gradient : indique la direction de plus forte pente, dont de dérivée directionnelle maximale, et est perpendiculaire aux courbes de niveau (démonstration hors-programme pour ce dernier point)

   (d) Formule des accroissements finis entre A et B, lorsque $[AB]$ est contenu dans le domaine de définition de f, et f de classe $\mathcal{C}^1$.