**Programme des colles de la semaine 19 (09/03 – 14/03)**

**I. Fonctions de plusieurs variables réelles : calcul différentiel** (voir semaine 17)

**II. Fonctions de plusieurs variables réelles : extremums**

1. **Définitions** (voir semaine 18)
2. **Étude des extremums locaux**
   (a) Condition nécessaire du premier ordre (voir semaine 18)
   (b) Condition suffisante du second ordre (voir semaine 18)
   (c) Cas des fonctions de deux variable :
   - notations de Monge,
   - existence d'extremums suivant le signe de $\det \nabla^2 f_A = rt - s^2$, en cas d'extremum, min ou max suivant le signe de $r$.
   - Cas d'indétermination
   - Col, ou point selle.

   (d) Application de la notion de point critique à la démonstration du théorème de diagonalisabilité des matrices symétriques réelles (on avait admis lors du chapitre d'algèbre bilinéaire l'existence d'une valeur propre réelle pour une matrice symétrique réelle ; on propose ici une preuve, basée sur l'étude d'une certaine fonction de $n$ variables)
3. **Recherche d'extremums globaux**
   (a) Existence
   - Thm (rappel) : si $f$ continue sur un sous-ensemble fermé borné de $\mathbb{R}^n$, $f$ y admet un min et un max.
   - Corollaire : si $f$ continue sur $D$, $F \subset D$ un fermé borné, $A \in F$ tq pour tout $X \in D \setminus F$, $f(X) \leqslant f(A)$, alors $f$ admet un max sur $D$, atteint en un point de $F$.

   (b) Déterminer les extremums globaux
   - Principe général : sur un ensemble fermé borné $F$, $f$ de classe $\mathcal{C}^1$ : $f$ admet un min et un max ; décomposer $F = U \cup B$, $U$ ouvert, intérieur de $F$, $B$ bord de $F$ ; rechercher les points critiques dans $U$. Rechercher les max et min sur $B$ (éventuellement en découpant en plusieurs morceaux), soit par l'étude d'extremums sous contrainte (voir plus loin), soit par paramétrisation (diminue le nombre de variables, et on fait donc pareil, jusqu'à être ramené à une seule variable).
     La plus grande valeur obtenue est le max ; la plus petite est le min.
   - Autres cas : $f$ $\mathcal{C}^1$ sur $D$. Commencer par déterminer l'existence du min ou max ; par exemple en utilisant le corollaire du thm d'existence ci-dessus (avec $F \subset D$ fermé borné). S'il existe un ouvert $U$ tel que $F \subset U \subset D$, faire la recherche des points critiques dans $U$, sinon, rechercher les extremums directement dans $F$, par la méthode exposé dans le point précédent.
   - Cas particulier n° 1 : $f(x_1, \dots, x_n) = g(\varphi(x_1, \dots, x_n))$, où $g$ est une fonction d'une variable. Si $g$ admet un maximum sur l'ensemble $\operatorname{Im} \varphi$, en $t_0$, alors $f$ admet un maximum en tout point de $\varphi^{-1}(t_0)$.
   - Cas particulier n° 2 : $f$ est une fonction polynomiale de degré 2 : une mise sous forme canonique (combinaison linéaire de carrés) permet de répondre plus rapidement à l'existence, la localisation et la valeur des minimums et maximums globaux. Aucune théorie n'est à connaître concernant cette réduction en carrés.

   (c) Recherche de la position d'un hyperplan tangent par rapport à la courbe :
   - étude locale : suivant le signe de $q_A$
   - étude globale : on est ramené à l'étude du signe, ou des extremums globaux, d'une certaine fonction.