Programme des colles de la semaine 20 (16/03 – 21/03)

Rappel : pas de colles la semaine du 23/03 au 28/03

I. Fonctions de plusieurs variables réelles : extremums

1. **Définitions** (voir semaine 18)
2. **Étude des extremums locaux** (voir semaine 19)
3. **Recherche d'extremums globaux** (voir semaine 19)
4. **Extremums sous contraintes linéaires**
   (a) Extremums sous une contrainte linéaire
   - Définition d'une contrainte
   - Notion d'extremum sous une contrainte $\mathcal{C}$.
   - Description d'une contrainte linéaire $\mathcal{C}$ comme intersection d'hyperplans affines d'équation $g_i(X) = b_i$, $i \in [\![1,p]\!]$ (g_i linéaire).
   - Notation $\mathcal{H}$ l'unique sous-espace vectoriel parallèle à la contrainte $\mathcal{C}$, défini par les équations homogènes $g_i(X) = 0$, $i \in [\![1,p]\!]$.

   (b) Points critiques sous contrainte
   - Points critiques sous la contrainte $\mathcal{C}$: f défini sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$; A est un point critique sous la contrainte $\mathcal{C}$ si et seulement si $A \in \mathcal{C} \cap U$ et $\nabla f_A \in \mathcal{H}^\perp$.
   - Prop : Si f est défini sur un ouvert U, si f admet un extremum local sous la contrainte $\mathcal{C}$ en A alors A est un point critique de f sous la contrainte $\mathcal{C}$.
     Réciproque fausse.

   (c) Un description de $\mathcal{H}^\perp$.
   - Les g_i étant linéaires ∇g_i est constante. On note simplement ∇g_i la valeur constante.
   - Théorème : $\mathcal{H}^\perp = \mathrm{Vect}(\nabla g_1, \dots, \nabla g_p)$.

   (d) Méthode.
   En pratique, dans les cas concrets, en basse dimension, on opérera le plus souvent par substitution de certaines variables, à l'aide des relations définissant la contrainte, afin de se ramener à l'étude des extremums d'une fonction à moins de variables (le plus souvent on se ramène ainsi à 1 ou 2 variables), et sans contrainte cette fois. La recherche des points critiques sous contrainte est à réserver aux cas un peu plus théoriques (optimisation en dimension n générique).

II. Convergences et approximations en probabilités

1. **Convergence en probabilités**
   - Définition
   - Inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev, pour des variables aléatoires discrètes ou à densité.
   - Loi faible des grands nombres, pour des variables aléatoires discrètes ou à densité.
   - Cas particulier : théorème d'or de Bernoulli
   - Un exemple classique (premier exemple simple d'« estimation » : on repète 1000 fois une expérience de Bernoulli de paramètre p inconnu, on obtient un certain nombre N de succès. Donner un intervalle I tel que $p \in I$ avec une fiabilité de 95%.
   - Une condition suffisante de convergence en probabilité (résultat hors-programme, démontré en TD ; la démonstration n'est pas exigible) :
     Si $E(X_n)$ tend vers $E(X)$ et $V(X_n - X)$ tend vers 0, alors X_n converge en probabilité vers X.
2. **Convergence en loi**
   - Définition générale, à l'aide des fonctions de répartition
   - Cas des variables discrètes, lorsque $X_n(\Omega) \subset \mathbb{Z}$ (seul cas au programme), ou $X_n(\Omega) \subset X(\Omega)$: convergence des probabilités ponctuelles.
     La démonstration de l'équivalence entre ces deux définitions dans le cas discret n'a pas été faite en cours.
   - Théorème de la limite centrée **(admis)** : si les X_n sont mutuellement indépendantes, de même loi, admettant une espérance et une variance, alors la variable aléatoire centrée réduite associée à $X_1 + \cdots + X_n$ converge en loi vers X suivant $\mathcal{N}(0,1)$.
3. **Approximations classiques**
   - Approximation d'une loi hypergéométrique par une loi binomiale : $X_n \hookrightarrow \mathcal{H}(N,n,p)$ converge en loi vers $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$.
     On considère qu'on peut approcher $\mathcal{H}(N,n,p)$ par $\mathcal{B}(n,p)$ si $N > 10n$.
   - Approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson : Si $np_n \to \lambda$, alors $X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p_n)$ converge en loi vers $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$.
     En pratique, on peut approcher $\mathcal{B}(n,p)$ par $\mathcal{P}(np)$ si $n \geqslant 30$, $p \leqslant 0.1$, $np \leqslant 10$.
   - Approximation d'une loi binomiale par une loi normale : on considère qu'on peut approcher $\mathcal{B}(n,p)$ par $\mathcal{N}(np, npq)$ si $n \geqslant 30$, $np \geqslant 5$, $nq \geqslant 5$
   - Approximation d'une loi de Poisson par une loi normale : on considère qu'on peut approcher $\mathcal{P}(\lambda)$ par $\mathcal{N}(\lambda,\lambda)$ si $\lambda \geqslant 18$.

III. Estimation (pas d'exercices cette semaine)

1. **Échantillons d'une loi de probabilité**
   - Définition d'un échantillon (ou échantillon aléatoire) de taille n : famille $(X_1, \dots, X_n)$ de variables aléatoires de même loi $\mathcal{L}$, appelée loi parente de l'échantillon.
   - Échantillon observé : réalisation d'un échantillon aléatoire $(X_1(\omega), \dots, X_n(\omega))$.
   - Définition : échantillon indépendant identiquement distribué (en abrégé autorisé : i.i.d.)
   - Définition : statistique sur un échantillon i.i.d.
   - Exemple et définition : moyenne empirique, variance empirique.
2. **Estimation ponctuelle**
   - Position du pb : un certain phénomène est codé numériquement par une variable aléatoire dont on ignore la loi, mais dont on connait l'appartenance à une certaine famille de lois μ_θ dépendant d'un paramètre θ(par exemple l'ensemble des lois de Bernoulli). La loi μ_θ est définie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P_\theta)$. But : estimer la valeur de θ, ou d'une fonction de θ, $g(\theta)$, par répétition de l'expérience.
   - Définition d'un estimateur de $g(\theta)$: $\varphi(X_1, \dots, X_n)$, $(X_1, \dots, X_n)$ échantillon i.i.d.
   - Estimation de $g(\theta)$: réalisation d'un estimateur.
   - Remarque : cela ne dit rien quant à la validité de l'estimation.
3. Biais d'un estimateur
   - Définition du biais $b_{T_n}(\theta) = E_\theta(T_n) - g(\theta)$.
   - Estimateur sans biais, estimateur biaisé. Exemples.