Programme des colles de la semaine 3 (29/09 – 04/09)

I. Diagonalisation : voir semaines 1 et 2

II. Algèbre bilinéaire

1. **Formes bilinéaires :** voir semaine 2
2. **Produits scalaires.**
   Dans ce paragraphe, E est un $\mathbb{R}$-ev de dimension quelconque (finie ou non), sauf indication contraire.
   (a) **Définitions**
   - Définition d'un produit scalaire
   - Exemples : ps usuel sur $\mathbb{R}^n$, $(f,g) \mapsto \displaystyle\int_a^b f(t)g(t)\ \mathrm{d}t$ sur $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$...

   (b) **Norme euclidienne.** On suppose E muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.
   - Notation $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$
   - Définition d'une norme.
   - Lemme : $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x, y\rangle$
   - Théorème : Inégalité de Cauchy-Schwarz
   - Corollaire : inégalité triangulaire pour $\|\cdot\|$
   - Théorème : $\|\cdot\|$ est une norme, appelée *norme euclidienne associée au produit scalaire* $\langle \cdot, \cdot \rangle$.
   - Exemples : normes associées au produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^n$, à produit scalaire $(f,g) \mapsto \displaystyle\int_a^b f(t)g(t)\ \mathrm{d}t$, et explicitation des inégalités de Cauchy-Schwarz dans ces deux cas.
   - Comment la donnée d'une norme euclidienne $\|\cdot\|$ permet de retrouver l'expression du produit scalaire associé.
   - Comment vérifier qu'une norme est euclidienne.
   - Exemple d'une norme non euclidienne ($X \mapsto \max(|x_i|, i \in [\![1,n]\!])$).