Programme des colles de la semaine 4 (06/10 – 11/10)

Algèbre bilinéaire

1. **Formes bilinéaires :** voir semaine 2
2. **Produit scalaire, norme euclidienne :** voir semaine 3
3. **Orthogonalité.**
   - Vecteurs orthogonaux, exemples.
   - Famille orthogonale, orthonormale (ou orthonormée). Base orthogonale, orthonormale.
   - Théorème : toute famille orthogonale sans 0 est libre.
   - Prop : expression des coordonnées d'un vecteur X dans une base orthonormale (en dimension finie).
   - Théorème de Pythagore.
4. **Sous-espaces vectoriels orthogonaux**
   - Stabilité par CL de l'orthogonalité.
   - Définition de $F \perp G$.
   - Caractérisation de l'orthogonalité par des familles génératrices
   - Définition : orthogonal $F^\perp$ d'un sous-espace vectoriel F
   - Proposition : $F^\perp$ est un sev de E. Nous n'avons pas encore évoquer de supplémentarité.
   - Exemple : comment déterminer l'orthogonal d'un sev dont on connait une base.
5. **Projetés orthogonaux**
   - Définition : $p_F(x) \in F$ tq $x - p_F(x) \in F^\perp$.
   - Prop : si F (de dim finie) peut être muni d'une b.o.n. (à ce moment, on n'a pas encore prouvé l'existence d'une b.o.n.), alors le projeté orthogonal $p_F(x)$ existe et est unique, pour tout $x \in E$.
   - Expression des coordonnées de $p_F(x)$ dans la b.o.n. de F dans le cas précédent.
   - Proposition : Le projeté orthogonal de x sur F minimise la distance $\|x - y\|$, $y \in F$. La distance $\|x - p_F(x)\|$ est appelée distance de x au sev F.
6. **Procédé d'orthonormalisation de Schmidt**

   (Pour cette semaine, on ne pourra demander que du cours ou des exercices de calculs concrets limités à une famille de trois vecteurs au plus, dans $\mathbb{R}^n$, $n \leqslant 4$, muni de son ps canonique.)
   - Étude concrète des cas $n = 2$ et $n = 3$, par projections successives.
   - Énoncé général du théorème d'orthonormalisation.
   - Prop : l'orthonormalisée de Schmidt d'un b.o.n. est elle-même.
   - Prop : l'orthonormalisée de Schmidt de $(\lambda_1 e_1, \dots, \lambda_n e_n)$, $\lambda_i \in \mathbb{R}_+^*$ est égale à l'orthonormalisée de Schmidt de $(e_1, \dots, e_n)$
   - Prop : plus généralement, l'orthonormalisée de Schmidt de $(\lambda_1 e_1, \dots, \lambda_n e_n)$, $\lambda_i \in \mathbb{R}^*$ est égale à $(\varepsilon_1 f_1, \dots, \varepsilon_n f_n)$, où pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\varepsilon_i = \pm 1$ est le signe de λ_i et $(f_1, \dots, f_n)$ est l'orthonormalisée de Schmidt de $(e_1, \dots e_n)$.
   - Exemples.
   - Thm : Tout espace de dimension finie, muni d'un ps, admet une b.o.n. pour ce ps.
   - En particulier, si F est un sev de dim finie de E, tout x de E se projète orthogonalement sur F.
   - Comment calculer le projeté d'un vecteur x sur un sev F de dim finie, en déterminant une b.o.n. de F.