

Programme des colles de la semaine 5 (13/10 – 18/10)

Algèbre bilinéaire

1. **Formes bilinéaires** : voir semaine 2
2. **Produit scalaire, norme euclidienne** : voir semaine 3
3. **Orthogonalité, projetés orthogonaux, orthonormalisation** : voir semaine 4
4. **Espaces euclidiens**.

Il s'agit essentiellement d'un bilan des résultats obtenus précédemment en dimension finie.

(a) Autour des bases

- Définition d'un espace euclidien
- Existence d'une b.o.n.
- Complétion d'une famille orthonormale en une b.o.n.
- Soit F un sev de E euclidien. $F^\perp$ est un supplémentaire de F , appelé supplémentaire orthogonal. De plus $(F^\perp)^\perp = F$.

(b) Matrices relativement à une b.o.n.

- Coordonnées d'un vecteur dans une b.o.n. (rappel), expression de $\|x\|^2$.
- Matrice d'un endomorphisme dans une b.o.n.
- Matrice du p.s. dans une b.o.n. : la matrice du p.s. relativement à la base $\mathcal{B}$ est égale à I_n si et seulement si $\mathcal{B}$ est une b.o.n. de E .
- Matrices orthogonales. La matrice de passage d'une b.o.n. à une autre b.o.n. est orthogonale.
- Une matrice est orthogonale si et seulement si ses colonnes forment une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$.

(c) Projections orthogonales.

- Existence de la projection orthogonale sur tout sev de E
- La projection orthogonale sur F est la projection sur F parallèlement à $F^\perp$.
- Notion de meilleure approximation : $p_F(x)$ est l'unique vecteur de F qui minimise $\|x - y\|$, $y \in F$, et est appelé meilleure approximation de x dans F .
- Distance de x à F .
- p_F et $p_{F^\perp}$ sont deux projecteurs associés.
- Méthodes pour déterminer la matrice de la projection orthogonale sur F . (sur un exemple)
- Problème des moindres carrés : Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Il existe un et un seul vecteur X_0 minimisant $\|AX - B\|$, $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$. Ce vecteur est solution du système de Cramer ${}^tAAX = {}^tAB$.

- Application : comment déterminer la droite des moindres carrés (de y en x) d'un nuage de points de $\mathbb{R}^2$.

5. Endomorphismes symétriques d'un espace euclidien

(pas encore d'exercices théoriques à ce sujet cette semaine)

- définition
- caractérisation par les bases, par la matrice dans une b.o.n.
- Les espaces propres d'un endo symétrique sont orthogonaux 2 à 2.
- u est symétrique ssi u est diagonalisable dans une b.o.n. de vecteurs propres.
Pour la démonstration, nous avons provisoirement admis l'existence d'une valeur propre réelle pour un endomorphisme symétrique.
- Diagonalisation des matrices symétriques.
- A symétrique, alors $A = \sum \lambda_i X_i {}^tX_i$ où (X_i) est une b.o.n. de vecteurs propres de A , et les λ_i sont les valeurs propres associées.