Programme des colles de la semaine 5 (20/10 – 25/10)

I. Algèbre bilinéaire

1. **Formes bilinéaires :** voir semaine 2
2. **Produit scalaire, norme euclidienne :** voir semaine 3
3. **Orthogonalité, projetés orthogonaux, orthonormalisation :** voir semaine 4
4. **Espaces euclidiens, endomorphismes symétriques : voir semaine 6**
5. **Formes quadratiques sur $\mathbb{R}^n$**

   Aucun exercice ne sera traité dans l'immédiat sur le sujet. Restez très proche du cours.
   - Définition
   - Existence et unicité d'une forme bilinéaire symétrique associée à une forme quadratique.
   - Existence et unicité d'une matrice symétrique A tq $q(x) = {}^tXAX$
   - Existence et unicité d'un endomorphisme symétrique u tel que $q(x) = \langle x, u(x) \rangle$. Lien entre u et A.
   - Description de q dans une b.o.n. de vecteurs propres de l'endomorphisme symétrique u associé.
   - Étude du signe de q suivant le signe des valeurs propres de u.
   - Corollaire : φ est un p.s. ssi sa matrice relativement à une base n'admet que des valeurs propres strictement positives ;
     q est le carré d'une norme euclidienne ssi l'endomorphisme symétrique associé n'admet que des valeurs propres strictement positives.

II. Suites numériques (révision du programme de première année)

Les élèves devront revoir dans leur cours de première année et dans le polycopié que j'ai distribué les points suivants. Les démonstrations ne sont pas exigibles, sauf celles mentionnées explicitement par un astérisque.

1. **Rappels de topologie**
   - Distances et normes sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^n$;
   - Exemples : normes N_p, distances d_p, $p \in [1, +\infty]$
   - Boules ouvertes, fermées ;
   - notion de voisinage d'un point.
   - sous-ensembles ouverts, fermés ;
   - intersections (finies, infinies) d'ouverts et de fermés.
2. **Convergence**
   (a) Définitions :
     - par les boules (valable dans tout espace métrique)
     - par ε (dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$)
     - par voisinage

   (b) Unicité de la limite

   (c) Propriétés arithmétiques des limites
     - Proposition : valeur absolue, somme, produit, quotient de limites (finies et infinies, dans les cas de détermination)
     - Thm : si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers ℓ et f continue en ℓ, alors $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $f(\ell)$.
     - Cas d'indéterminations : $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$, $\dfrac{\infty}{\infty}$, $\dfrac{0}{0}$, 1^∞, 0^0.
     - Croissances comparées.

   (d) **Propriétés générales des limites**
     - (*) Passage à la limite dans une inégalité.
     - (*) Théorème d'encadrement (ou théorème des gendarmes) dans $\overline{\mathbb{R}}$
     - Corollaire : méthode de calcul de limites par majoration de $|u_n - \ell|$
     - Cas de $u_n \geqslant v_n$ avec (v_n) de limite $+\infty$ (théorème de minoration)
     - Théorème de convergence des suites monotones
     - Suites adjacentes, théorème des suites adjacentes.
3. **Suites usuelles**
   - (*) Suites géométriques (récurrence, expression, limite, sommes, limite des sommes)
   - (*) Suites arithmétiques (idem)
   - (*) Sommes $\sum\limits_{k=0}^{n} k^\ell$: comment les retrouver de proche en proche.
   - Suites arithmético-géométriques (récurrence, (*) comment trouver une expression explicite)
   - Suites définies par une récurrence linéraire d'ordre k : explicitation dans le cas de **racines distinctes** du polynôme caractéristique.
     Cas d'une racine double **lorsque** $k = 2$ **seulement**.
   - Suites définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$.
     Pas d'étude exhaustive. En particulier, pas de considération de point fixes attractifs ou répulsifs.
     * (*) Si f est croissante, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone. À démontrer à chaque utilisation.
     * (*) Si f est décroissante, alors $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont monotones de sens de variation opposé. À démontrer à chaque utilisation.
     * Dans les autres cas, étude de $x \mapsto f(x) - x$.
     * Passage à la limite dans la relation de récurrence *si f est continue* .
4. **Comparaisons asymptotiques**

   (a) **Équivalents**
     - Définition (on s'est restreint au cas où $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est non nulle à partir d'un certain rang).
     - Égalité des limites de deux suites équivalentes. Réciproque dans le cas où $\ell \neq 0$, $\ell \neq \pm\infty$.
     - **On ne peut pas appliquer une fonction à un équivalent**
     - **On ne peut pas sommer des équivalents**
     - $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$ n'implique pas forcément la convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (limite finie ou infinie).
     - En général (u_{n+1}) n'est pas équivalent à (u_n).
     - Equivalents classiques.
     - Application à des calculs de limites.

   (b) **Négligeabilité, domination** (uniquement dans le cas de suites (v_n) ne s'annulant pas à partir d'un certain rang).
     Étant hors-programme les grand-O n'ont peut-être pas été vus l'année dernière. Ne pas en exiger trop des élèves à ce propos !
     - Définition : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ négligeable devant $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Notation de Landau : $u_n = o(v_n)$.
     - Définition (Hors-programme) : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dominé par $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Notation de Landau : $u_n = O(v_n)$.
     - Somme o, O.
     - Toutes les règles usuelles combinant o, O et $\sim$. Notamment $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n \iff u_n = v_n + o(v_n)$.