Programme des colles de la semaine 7 (10/11 – 15/11)

I. Algèbre bilinéaire

1. **Formes bilinéaires** : voir semaine 2
2. **Produit scalaire, norme euclidienne** : voir semaine 3
3. **Orthogonalité, projetés orthogonaux, orthonormalisation** : voir semaine 4
4. **Espaces euclidiens, endomorphismes symétriques** : voir semaine 5
5. **Formes quadratiques sur $\mathbb{R}^n$** : voir semaine 6

II. Suites numériques (révision du programme de première année) : voir semaine 6

III. Séries numériques (révision du programme de première année)

1. Notion de série et de convergence
 - (a) Définitions : série, terme général, somme partielle, convergence, divergence, nature.
 - (b) Propriétés
 - Lemme : Si (u_n) et (v_n) diffèrent d'un nombre fini de termes, alors $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.
 - Proposition : Si $\sum u_n$ converge, alors (u_n) tend vers 0.
Réciproque fautive ! Contre-exemple exigible
 - Notion de divergence grossière
 - Proposition :
 - Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent, alors $\sum(\lambda u_n + \mu v_n)$ converge.
 - Si $\sum u_n$ converge et $\sum v_n$ diverge, alors $\sum(u_n + v_n)$ diverge.
 - (c) Types de convergence
 - Convergence absolue, semi-convergence
 - Théorème : Toute série absolument convergente est convergente.
 - En revanche, si $\sum |u_n|$ diverge, cela n'implique pas que $\sum u_n$ diverge.
2. Séries à termes positifs
 - (a) Comparaison de deux séries, propriétés générales
 - Proposition (convergence des séries à termes positifs) : une série à termes positifs $\sum u_n$ soit converge dans $\mathbb{R}$, soit diverge vers $+\infty$.
 - Théorème (de comparaison des séries à termes positifs, TCSTP).
 - Corollaire : comparaison par dominance ou négligeabilité
 - Proposition : comparaison par équivalents
 - **Contre-exemple** pour des séries à termes quelconques (En passant, introduction aux méthodes de preuve de convergence de séries alternées)
 - Transcription de ces critères dans le cas de l'étude de la convergence absolue.
 - (b) Comparaison série/intégrale
 - Théorème : Soit f positive, intégrable sur tout intervalle $[0, A]$, et décroissante sur $\mathbb{R}_+$. Alors $\sum f(n)$ converge si et seulement si $x \mapsto \int_0^x f(t) dt$ admet une limite lorsque x tend vers $+\infty$.
 - Cas de fonctions intégrables sur $[a, A]$ pour tout $A \in \mathbb{R}$.
 - Exemple : séries de Riemann (**Résultats à savoir impérativement par cœur**)

3. Comparaison avec une série géométrique

- Règle de d'Alembert. **Ce résultat, hors-programme, n'est pas à utiliser tel quel, mais il faut refaire le raisonnement rapidement à chaque utilisation.**

4. Comparaison avec une série de Riemann

- Règle de Riemann, ou règle « $n^\alpha u_n$ » : $\sum u_n$ à termes positifs.
- **La règle de Riemann est hors-programme et n'est pas à utiliser telle quelle. Il faut refaire le raisonnement à chaque fois, sans faire référence au résultat.**

5. Calculs de sommes : on pourra utiliser la valeur des sommes des séries de l'exponentielle, et des dérivées successives de la série géométrique (les formules correspondantes découlant de la formule du binôme négatif, au programme).

Si on suit le programme à la lettre, la série géométrique est la seule qu'on soit autorisée à dériver termes à termes, avec la justification adéquate, consistant à dire qu'il s'agit de la formule du binôme négatif

6. Séries à termes quelconques

On ne donne pas de résultat général. La méthode de preuve de la convergence de séries alternées a été vue en cours et en TD ; Cette méthode est à connaître mais pas le résultat général.

La règle d'Abel est hors programme et n'a de fait pas été vue

IV. Combinatoire (révisions)

(Nous n'avons pas encore fait d'exercices de révision. Seul le polycopié a été distribué)

1. Combinatoire des ensembles finis

- Notion de cardinal (bijection avec $\{1, \dots, n\}$), notation $|E|$.
- Propriétés : cardinal de l'ensemble vide, d'une union disjointe de 2 (ou plus) ensembles, d'un complémentaire, d'une union non disjointe de 2 ensembles, d'un produit cartésien
- Théorème : formule du crible de Poincaré (formule d'inclusion-exclusion)

2. Combinatoire des applications

- Dénombrement des p -listes, ou ensemble d'applications F^E ; cas particulier : $\mathcal{P}(E)$.
- Dénombrement des p -listes sans répétition, ou ensemble des injections; arrangements; cas particulier : $|\mathfrak{S}_n| = n!$

3. Combinatoire des sous-ensembles

- Coefficients binomiaux définis comme le nombre de sous-ensemble à k éléments d'un ensemble à n éléments
- Théorème : la valeur du coefficient binomial
- Preuve combinatoire de la formule du binôme

4. Le grand principe de la combinatoire : la bijection

Exemple 1 : la symétrie des coefficients binomiaux.

Exemple 2 : dénombrement des n -uplets d'entiers $k_i > 0$ tels que $k_1 + \dots + k_n = p$.

Exemple 3 : dénombrement des n -uplets d'entiers $k_i \geq 0$ tels que $k_1 + \dots + k_n = p$.

5. Recapitulatif : combinatoire des différents modes de tirages de boules :

- Tirage successif avec remise (arrangements avec répétitions)
- Tirage successif sans remise (arrangements sans répétitions, A_n^p)
- Tirage simultané « sans remise » (combinaisons sans répétition, $\binom{n}{k}$).

6. Pourquoi la combinatoire ?

- Calcul de probabilités
- Obtenir des formules. Exemple : démo combinatoire de Pascal, Vandermonde, formule sommatoire des coefficients binomiaux...