Algèbre 1 – Révisions d'algèbre linéaire

Exercice 1 – (HEC) – Soit E l'espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On définit les fonctions f_k, $k \in \mathbb{N}$, par :

$$f_0(x) = 1 \qquad \text{et} \qquad \forall k \in \mathbb{N}^*, f_k(x) = \cos^k(x),$$

et les fonctions φ_k, $k \in \mathbb{N}$, par : $\forall n \in \mathbb{N}, \varphi_k(x) = \cos(kx)$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \varphi_k(x)\varphi_h(x)\,\mathrm{d}x$, pour tout $(h,k) \in [\![1,n]\!]^2$.
   En déduire que la famille $\mathcal{F}_n = (\varphi_k)_{k\in[\![1,n]\!]}$ est libre.
2. On désigne par F_n le sev de E constitué des combinaisons linéaires de φ_i, $i \in [\![1,n]\!]$.
   (a) Quelle est la dimension de F_n ?
   (b) Soit p un entier inférieur ou égal à n. Montrer que $f_p \in F_n$, et déterminer ses composantes dans $\mathcal{F}_n$.
   (c) En déduire la valeur de $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos^p(x)\cos(kx)\,\mathrm{d}x$, pour $k \in [\![1,n]\!]$.
3. Étudier l'appartenance de la fonction $x \mapsto \sin^p(x)$ à F_n.

Exercice 2 – Soit n un entier naturel. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré $n+1$. On note $P\cdot\mathbb{R}[X]$ l'ensemble des polynômes divisibles par P.

1. Montrer que $P\cdot\mathbb{R}[X]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$.
2. Montrer que $\mathbb{R}_n[X]$ et $P\cdot\mathbb{R}[X]$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 3 – Soit E un espace vectoriel de dimension $n \geqslant 2$ et F et G deux sous-espaces vectoriels de E de dimension $p < n$. Montrer que F et G admettent un supplémentaire commun.

Exercice 4 – Soit $f : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X]$ l'application définie par : $f(P) = P - P'$.

1. Montrer que f est un endomorphisme. Déterminer sa matrice dans la base $(1, X, \dots X^n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Montrer que f est un automorphisme, et déterminer f^{-1}.
3. Soit $Q = 2X^4 - 4X^3 + 3X^2 + X - 6$. Trouver l'unique polynôme P de E tel que $f(P) = Q$.

Exercice 5 –

1. Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et f un endomorphisme de E. Montrer que si pour tout $x \in E$ les vecteurs x et $f(x)$ sont colinéaires, alors f est une homothétie.
2. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que pour tout $u \in \mathcal{L}(E)$, $u \circ f = f \circ u$. Montrer que f est une homothétie.

Exercice 6 – Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, et p et q deux projecteurs. Montrer que $p = q$ si et seulement si $\operatorname{Im} p = \operatorname{Im} q$ et $p \circ q = q \circ p$.

Exercice 7 – Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, et p et q deux projecteurs de E. Montrer que $p+q$ est un projecteur si et seulement si $p \circ q = q \circ p = 0$.

Exercice 8 – Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, p un projecteur de E, et $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que $p \circ f = f \circ p$ si et seulement si $\operatorname{Ker}(p)$ et $\operatorname{Im}(p)$ sont stables par f.

Exercice 9 – Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

1. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, et g un projecteur de E. Montrer que :
$$\operatorname{Ker}(f \circ g) = \operatorname{Ker}(g) \oplus (\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} g).$$
2. Soit f un projecteur de E, et $g \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que :
$$\operatorname{Im}(f \circ g) = \operatorname{Im}(f) \cap (\operatorname{Ker} f + \operatorname{Im} g).$$
3. Soit g un projecteur, alors $\mathrm{id} - g$ est un projecteur et $\operatorname{Ker} g = \operatorname{Im}(\mathrm{id} - g)$, et $\operatorname{Im}(g) = \operatorname{Ker}(\mathrm{id} - g)$.
4. Soit f et g deux projecteurs de E. Montrer que $f \circ g$ est un projecteur si et seulement si :
$$\operatorname{Im}(f) \cap (\operatorname{Ker}(f) + \operatorname{Im}(g)) \subset \operatorname{Im}(g) \oplus (\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Ker} g).$$

Exercice 10 – Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant $f^5 = f$. Montrer que $E = \operatorname{Im} f \oplus \operatorname{Ker} f$.

Exercice 11 – Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie d, et soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme nilpotent (c'est-à-dire $u^n = 0$ pour n assez grand). On note n l'indice de nilpotence de u (c'est-à-dire $u^n = 0$ et $u^{n-1} \neq 0$.

1. Montrer qu'il existe $x \in E$ tel que la famille $(x, u(x), \dots, u^{n-1}(x))$ soit libre.
2. Comparer n et d.
3. Si $n = d$, justifier l'existence d'une base dans laquelle la matrice de u est $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$

Exercice 12 – Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ canoniquement associé à la matrice A.

1. Déterminer $\operatorname{Ker} f$, $\operatorname{Im} f$ et leur dimension.
2. Déterminer une base de $\operatorname{Ker}(f^2)$ et une base de $\operatorname{Ker}((f - \mathrm{id})^2)$. Montrer que ces deux sous-espaces sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$.
3. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3, e'_4)$ de $\mathbb{R}^4$ dans laquelle la matrice de f est égale à $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
4. Écrire la matrice de passage P de la base canonique à la base $\mathcal{B}'$. Calculer P^{-1}.
5. Calculer T^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, en déduire A^n.

Exercice 13 – Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $2p$, avec $p \in \mathbb{N}$, st soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\operatorname{rg}(u) = p$ et $u^2 = 0$. Comparer $\operatorname{Im}(u)$ et $\operatorname{Ker}(u)$.

Exercice 14 – Soit E un $\mathbb{R}$-ev de dimension finie, et soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

1. Montrer que la suite de sous-espaces vectoriels $(\mathrm{Ker}\ u^k)_{k\in\mathbb{N}}$ est croissante pour l'inclusion, et la suite $(\mathrm{Im}\ u^k)_{k\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
2. Montrer que s'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $\mathrm{Ker}(u^p) = \mathrm{Ker}(u^{p+1})$, alors $\mathrm{Ker}(u^k) = \mathrm{Ker}(u^p)$ pour tout $k \geqslant p$. Qu'en est-il de $\mathrm{Im}(u^k)$?
3. Montrer que pour une telle valeur de p, $\mathrm{Ker}(u^p)$ et $\mathrm{Im}(u^p)$ sont supplémentaires dans E.
4. Montrer que la suite $(\dim \mathrm{Ker}\, u^{p+1} - \dim \mathrm{Ker}\, u^p)_{p\in\mathbb{N}}$ est décroissante. En d'autres termes, les sauts de dimension sont de plus en plus petits.
   Indication : Écrire $\mathrm{Ker}\, u^{p+1} = \mathrm{Ker}\, u^p \oplus S$, et montrer que u se restreint en une injection de S dans $\mathrm{Ker}\, u^p$ dont l'image est en somme directe avec $\mathrm{Ker}\, u^{p-1}$.
5. On suppose que u est nilpotent et que $\dim(\mathrm{Ker}\, u) = 1$. Montrer que pour tout $k \leqslant \dim(E)$, $\dim(\mathrm{Ker}(u^k)) = k$.

Exercice 15 – On considère E un $\mathbb{K}$-ev de dimension $(p+1)n$, n et p étant des entiers non nuls, avec $p \geqslant 2$. Soit f un endomorphisme de E, vérifiant : $f^3 = 0$ et $\mathrm{rg}(f) = pn$. Montrer que $\mathrm{rg}(f^2) = n$.

Exercice 16 – Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 17 – Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ telle que $f \neq 0$, et $f^2 = 0$. Montrer qu'il existe une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est égale à $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 18 – Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On définit la trace de A par : $\mathrm{tr}(A) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{i,i}$. Montrer les assertions suivantes.

1. tr est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
2. $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2,\ \mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.
3. Deux matrices semblables ont même trace.

Justifier qu'on peut ainsi définir la notion de trace d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie.

Exercice 19 – (Oral HEC) – Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\omega_n = \mathrm{e}^{\frac{2\,\mathrm{i}\,\pi}{n}}$.

1. Déterminer en fonction de ω_n les racines complexes de $z^n = 1$.
2. (a) Soit p un entier relatif. Donner la valeur de $S_n(p) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \omega_n^{kp}$.
   (b) Soient $p, q \in \mathbb{Z}$. Calculer : $T_n(p,q) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \omega_n^{kp}\omega_n^{kq}$ et $V_n(p,q) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \omega_n^{kp}\omega_n^{-kq}$.
3. Soit A_n la matrice $(a_{i,j})_{(i,j)\in[[1,n]]^2}$ telle que : $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ a_{i,j} = \omega_n^{(i-1)(j-1)}$.
   (a) Calculer l'inverse de A_3 (On pourra exploiter la symétrie de A_3).
   (b) Soit $\overline{A_n}$ la matrice $(\overline{a_{i,j}})_{(i,j)\in[[1,n]]^2}$. Effectuer le produit $A_n\overline{A_n}$.
   (c) En déduire l'inverse de A_n.

Exercice 20 –
Soit n un entier naturel non nul, et soit E un espace vectoriel de dimension $4n$. Soit f un endomorphisme de E tel que $f^4 = 0$, et tel que $\mathrm{rg}\, f^2 = 2n$.

1. (a) Montrer que $\mathrm{Ker}\, f \subset \mathrm{Ker}\, f^2 \subset \mathrm{Ker}\, f^3$, et que $\mathrm{Im}\, f^3 \subset \mathrm{Im}\, f^2 \subset \mathrm{Im}\, f$.
   (b) Montrer que $\mathrm{Ker}\, f^2 = \mathrm{Im}\, f^2$.
   (c) Soit g la restriction de f à $\mathrm{Im}\, f$. Montrer que $\mathrm{Ker}\, g = \mathrm{Ker}\, f$ et que $\mathrm{Im}\, g = \mathrm{Im}\, f^2$.
   (d) En déduire le rang de f.
   (e) En considérant h la restriction de f à $\mathrm{Im}\, f^2$, calculer de même le rang de f^3.
   (f) En déduire l'existence d'une base $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_{4n})$ de E dans laquelle la matrice de f est :
   $$\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}} \end{pmatrix}$$
   (matrice carrée d'ordre $4n$ constituée de n blocs d'ordre 4 sur la diagonale, et de 0 partout ailleurs)
   Indication : Considérer une base $(b_4, b_8, \ldots, b_{4n})$ d'un supplémentaire de $\mathrm{Ker}\, f^3$ *dans E.*
2. **Application numérique, pour** $n = 1$.
   Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, *et soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ canoniquement associé à A.*
   (a) Calculer A, A^2, A^3, A^4, A^n pour tout $n > 4$. Déterminer leur rang.
   (b) Déterminer une base de $\mathrm{Ker}\, f^3$, et compléter cette famille en une base de $\mathbb{R}^4$.
   (c) En déduire une base $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3, b_4)$ dans laquelle la matrice de f est
   $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
   (d) Exprimer la matrice de passage P de la base canonique vers la base $\mathcal{B}$. Donner une relation entre P, A et M.
   (e) Donner une expression de la matrice $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}^n$ sous forme d'un produit de trois matrices.