Algèbre 3 – Diagonalisation

Exercice 1 – Déterminer les valeurs propres des endomorphismes f de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans la base canonique est M. Ces endomorphismes sont-ils diagonalisable dans $\mathbb{R}$? dans $\mathbb{C}$? Si oui, calculer M^n, ainsi qu'une matrice $N \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ telle que $N^2 = M$.

1. $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ 2. $M = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ 3. $M = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ 4. $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 5. $M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 2 – Soit $A = \begin{pmatrix} -4 & -6 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}$. A est-elle diagonalisable ? Calculer A^n.

Exercice 3 – Soit u un endomorphisme nilpotent. Déterminer $\mathrm{Spec}(u)$.

Exercice 4 – Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. A est-elle diagonalisable ?

Exercice 5 – Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer $A^3 - 3A^2 + 3A - I$. A est-elle diagonalisable ?

Exercice 6 – Soit f un endomorphisme d'un espace E de dimension finie.

1. Montrer que si λ est une valeur propre non nulle, alors $E_\lambda \subset \mathrm{Im}\, f$.
2. Montrer que si f est diagonalisable, alors $\mathrm{Im}\, f \oplus \mathrm{Ker}\, f = E$.

Exercice 7 – Soit E un espace vectoriel de dimension au moins 2, et f un endomorphisme de E de rang 1.

1. Quel est le nombre de valeurs propres de f ?
2. Soit X un vecteur non nul de $\mathrm{Im}\, f$. Donner une CNS portant sur X pour que f soit diagonalisable. Le cas échéant, comment déterminer l'unique valeur propre non nulle λ et l'espace propre correspondant E_λ ?
3. Exemple : diagonaliser $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$.

Exercice 8 – Soient E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n et u un endomorphisme de E possédant n valeurs propres distinctes.

1. Montrer que $v \in \mathcal{L}(E)$ vérifie $u \circ v = v \circ u$ ssi les vecteurs propres de u sont aussi vecteurs propres de v.
2. Montrer qu'il existe $w \neq 0$ tel que $w \circ u = -u \circ w$ si et seulement si soit u admet deux valeurs propres opposées, soit 0 est valeur propre de u.

Exercice 9 – **(codiagonalisation)**
Soit u et v deux endomorphismes diagonalisables d'un $\mathbb{R}$-ev E.

1. On suppose que $uv = vu$
   (a) Montrer que les sous-espaces propres de u sont stables par v.
   (b) En déduire qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle la matrice de u et la matrice de v sont diagonales.
2. On suppose maintenant qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle la matrice de u et la matrice de v sont diagonales. Montrer que $uv = vu$.

Exercice 10 – Soit E un ev de dimension 4, et $\mathcal{B}$ une base de E. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que :

$$[f]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Déterminer les valeurs propres de f ; f est-elle diagonalisable ?

Exercice 11 – Soit E un espace vectoriel de dimension finie, et $u \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant $u^3 - 3u^2 + 2u = 0$. Montrer que u est diagonalisable.

Exercice 12 – Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère l'application $\varphi : \mathbb{R}_n[X] \longrightarrow \mathbb{R}_n[X]$:

$$\varphi(P) = (X^2 - 1)P'(X) - (nX + 1)P(X).$$

1. Vérifier que φ est effectivement un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Soit P un vecteur propre de φ. Montrer que les seules racines possibles de P dans $\mathbb{C}$ sont -1 et 1. En déduire les valeurs propres de φ.
3. L'endomorphisme φ est-il diagonalisable ?

Exercice 13 – Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie, et p, q deux projecteurs tels que $p \circ q = q \circ p$. On pose $f = p + q$ et $g = p \circ q$.

1. (a) g est un projecteur.
   (b) $\mathrm{Spec}(p) \subset \{0, 1\}$, $\mathrm{Spec}(q) \subset \{0, 1\}$, $\mathrm{Spec}(f) \subset 0, 1, 2$.
2. $0 \in \mathrm{Spec}(f)$ ssi $\mathrm{Ker}\ p \cap \mathrm{Ker}\, q \neq \{0\}$. Déterminer alors E_0.
3. $2 \in \mathrm{Spec}(f)$ ssi $\mathrm{Im}\ p \cap \mathrm{Im}\ q \neq \{0\}$. Déterminer alors E_2.

Exercice 14 – Soit E un $\mathbb{C}$-ev de dimension 4, $\mathcal{B}$ une base de E. Soit :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On note f l'endomorphisme dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est A.

1. Donner une base de $\mathrm{Im}\ f$ et de $\mathrm{Ker}\ f$.

2. (a) Soit $y \in \mathrm{Im}\ f$ non nul. Montrer que y est un vecteur propre. Quelle est la valeur propre associée ?
   (b) Déterminer les valeurs propres de f.
   (c) L'endomorphisme f est-il diagonalisable ? Si oui, donner une base de diagonalisation.
3. Diagonaliser B.

Exercice 15 – (d'après oral ESCP) – Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer la matrice $B = A^2 + 2I_3$.
2. Montrer que $B^2 = B + 2I$.
3. Déterminer les valeurs propres de B, et les sous-espaces propres associés. B est-elle diagonalisable ?
4. En utilisant une relation entre les valeurs propres de A et les valeurs propres de B, justifier que A n'est pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
5. Montrer que B est inversible et exprimer B^{-1} en fonction des matrices B et I.
6. On s'intéresse maintenant aux puissances de B.
   (a) On pose pour tout $n \geqslant 2$, $X^n = (X^2 - X - 2)Q_n(X) + R_n(X)$, où Q_n et R_n sont deux polynômes tels que $\deg(R_n) < 2$.
   Justifier l'existence et l'unicité de Q_n et R_n, et déterminer R_n.
   (b) En déduire l'expression de B^n en fonction de I, B et n, pour $n \geqslant 0$.
   (c) Montrer que l'expression de B^n en fonction de I, B et n qui a été obtenue pour $n \geqslant 0$ est encore valable pour les entiers négatifs.

Exercice 16 – (Oral ESCP) – Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues sur $\mathbb{R}$, à valeurs réelles. Soit $a > 0$ un réel donné. À tout f de E, on associe la fonction $T_a(f)$ définie pour tout x réel par :

$$T_a(f) = \frac{1}{2a} \int_{x-a}^{x+a} f(t)\ \mathrm{d}t.$$

1. Montrer que pour tout f de E, $T_a(f)$ est bien définie, et est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que $T_a(f)$ est constante si et seulement si f est périodique de période $T = 2a$.
3. Montrer que l'application T_a est un endomorphisme de E. Détemriner son noyau. T_a est-il surjectif ?
4. Soit $n \geqslant 2$ un entier naturel et $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des fonctions polynômes de degré inférieur ou égal à n. Montrer que la restriction de T_a à $\mathbb{R}_n[X]$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
   On notera encore T_a cette restriction.
5. (a) Montrer que la matrice associée à T_a dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ est triangulaire supérieure. En déduire les valeurs propres de T_a. Cet endomorphisme est-il diagonalisable ?
   (b) Soit $f \in \mathbb{R}_n[X]$. Montrer que si le degré de f est égal à 2, f n'est pas vecteur propre de T_a.
   (c) Montrer que si f est vecteur propre de T_a, sa dérivée f' l'est également. En déduire les sous-espaces propres de T_a.

Exercice 17 – (Oral HEC) – Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & -8 \\ 4 & 12 \end{pmatrix}$.

1. Trouver $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ et D diagonale tels que $D = P^{-1}AP$.
2. Soit B tel que $BA = AB$. Montrer que tout vecteur propre de A est vecteur propre de B. En déduire que $P^{-1}BP$ est diagonale dès que B commute avec A.
3. Trouver toutes les matrices M réelles d'ordre 2 telles que $M^2 = A$.
4. Même question avec $A = I_2$, puis $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 18 – (Oral HEC) – Soient trois suites réelles définies par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\begin{cases} a_{n+1} = -a_n + b_n + c_n \\ b_{n+1} = a_n - b_n + c_n \\ c_{n+1} = a_n + b_n - c_n. \end{cases}$

Déterminer $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en fonction de a_0, b_0, c_0 et n. Convergence ?

Exercice 19 – (Oral HEC) –

1. Soit $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & b \end{pmatrix}$. CNS sur a et b pour que A soit diagonalisable ?
2. Soient X et Y deux v.a.r. indépendantes suivante une loi binomiale $\mathcal{B}(n, \frac{1}{2})$. Soit M la matrice aléatoire $M = \begin{pmatrix} X & 1 \\ 0 & Y \end{pmatrix}$. Calculer la probabilité de l'événement : « M est diagonalisable ».

Exercice 20 – (Oral HEC) – Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Montrer qu'il existe a_n et b_n tels que $M^n = a_n M + b_n I_3$. Les déterminer.
2. Trouver le reste de la division euclidienne de X^n par $X^2 - X - 2$. Retrouver 1.
3. Diagonaliser M. Retrouver 1.

Exercice 21 – (Oral ESCP) – On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$. On suppose qu'il existe un entier $n \geqslant 2$ tel que $A^n = I_2$. Le but de l'exercice est de montrer qu'alors, $A^{12} = I_2$. On note σ l'ensemble des valeurs propres (réelles ou complexes) de A.

1. Montrer que $\lambda \in \sigma$ si et seulement si $\lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad - bc) = 0$.
   En déduire que σ n'est pas vide.
2. Vérifier que la matrice A vérifie la relation $A^2 - (a+d)A + (ad-bc)I_2 = 0$.
3. Montrer que σ vérifie l'une et seulement l'une des deux propositions suivantes :
   (i) $\sigma \subset \{-1, 1\}$
   (ii) il existe un entier p tel que $1 \leqslant p < \frac{n}{2}$, et $\sigma = \{\mathrm{e}^{\frac{2\,\mathrm{i}\,p\pi}{n}}, \mathrm{e}^{\frac{-2\,\mathrm{i}\,p\pi}{n}}\}$.
   Que peut-on dire, dans ce cas, du nombre $2\cos\left(\frac{2p\pi}{n}\right)$?
4. On suppose que $\mathrm{Card}(\sigma) = 2$. En étudiant les différents cas, montrer que $A^{12} = I_2$.
5. On suppose que $\sigma = 1$, et que $A \neq I_2$.
   (a) En utilisant la question 2, montrer que $\mathrm{Ker}(A - I_2) = \mathrm{Im}(A - I_2)$.
   (b) En déduire que A est semblable à $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
   (c) Calculer T^k pour tout $k \geqslant 1$. En déduire une contradiction.
6. Montrer que si $\sigma = -1$ et $A \neq -I_2$, on arrive également à une contradiction.
7. Conclure.