Algèbre 4 – Formes bilinéaires, produits scalaires

Exercice 1 – Les applications ci-dessous sont-elles des formes bilinéaires ? Si oui, sont-elles symétriques ? définies ? positives ?

1. E l'espace vectoriel des séries convergentes à coefficients réels, $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ définie par :
$$\varphi\left(\sum a_n, \sum b_n\right) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n\right)$$
2. De même si E est l'espace vectoriel des séries convergentes à termes positifs
3. $E = \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, $X \in \mathcal{M}_{n,1}$, $\forall (M,N) \in$ E, $\Phi(M,N) = {}^tX\, {}^tMNX$.
4. $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, $\forall (f,g) \in E^2$, $\varphi(f,g) = f \circ g(0)$.

Exercice 2 – Dans tous les cas suivants, déterminer si φ est une forme bilinéaire sur E. Le cas échéant déterminer si elle est symétrique, définie, positive, et exprimer sa matrice dans la base canonique, puis dans la base $\mathcal{C}$, par deux méthodes.

1. $E = \mathbb{R}^2$, $\forall \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}, \varphi\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}\right) = 4xx' - xy' + x'y + yy'$, $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$
2. $E = \mathbb{R}^2$, $\forall \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}, \varphi\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}\right) = 4xx' - xy' - x'y + yy'$, $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$
3. $E = \mathbb{R}^2$, $\forall \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}, \varphi\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}\right) = 4xx' - 4xy' - 4x'y + yy'$, $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$
4. $E = \mathbb{R}^3$, $\forall \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}, \varphi\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}\right) = xx' - xy' + zz'$, $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$
5. $E = \mathbb{R}^3$, $\forall \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}, \varphi\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}\right) = xx' - xy' + yz$, $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$
6. $E = \mathbb{R}^3$, $\forall \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}, \varphi\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}\right) = xx' + yy' - 2xy' + zz'$, $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

Exercice 3 – Soit $\mathbb{C}$, considéré comme espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Prouver que l'application $(u,v) \mapsto \Re(u\overline{v})$ est un produit scalaire sur $\mathbb{C}$. Quelle est sa norme euclidienne associée ?

Exercice 4 – Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, et soit E l'ensemble des polynômes P de $\mathbb{R}_n[X]$ tels que $P(0) = P(1) = 0$. Soit φ l'application de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ définie par $\varphi(P,Q) = -\displaystyle\int_0^1 P(x)Q''(x)\,\mathrm{d}x$.

1. Montrer que E est un espace vectoriel.
2. Montrer que φ définit un produit scalaire sur E. Expliciter la norme euclidienne associée.

Exercice 5 – Soit $n \in \mathbb{N}$, $E = \mathbb{R}_n[X]$, et $(x_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ une famille de réels deux à deux distincts. Pour tout $i \in [\![0,n]\!]$, on pose $Q_i = \displaystyle\prod_{\substack{0 \leqslant j \leqslant n \\ j \neq i}} \frac{X - x_j}{x_i - x_j}$.

1. (a) Vérifier que pour tout couple (i,j) d'entiers de $[\![0,n]\!]$,
$$Q_i(x_j) = \begin{cases} 1 & \text{si j=1} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$
   (b) En déduire que $(Q_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ est une base de E.
2. Démontrer que l'application φ de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ définie par
$$\varphi(A,B) = \sum_{i=0}^{n} A(x_i)B(x_i)$$
est un produit scalaire sur E, et que $(Q_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ est une base orthonormale de E pour φ.
3. Quelles sont les coordonnées d'un polynôme P quelconque de E dans cette base ?

Exercice 6 – **(Oral ESCP)** Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, avec $a < b$.

1. Soient $a_1, \ldots, a_n$ des entiers naturels deux à deux distincts. Démontrer que la famille des applications f_k de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$, définies par
$$f_k(x) = \mathrm{e}^{a_k x},$$
pour $k \in [\![1,n]\!]$, est libre dans l'espace $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$.
2. Soit f une application élément de $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$, strictement positive. On pose, pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$,
$$a_{i,j} = \int_a^b \mathrm{e}^{(i+j)t} f(t)\,\mathrm{d}t.$$
On note $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$, et on considère l'application φ de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ définie par
$$\varphi(x,y) = {}^tXAY,$$
où X et Y sont les matrices de coordonnées respectives de x et y dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Prouver que φ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$.

Exercice 7 – Soit E l'ensemble des suites réelles définies sur $\mathbb{N}$. On note ℓ^2 l'ensemble des suites réelles $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que la série de terme général u_n^2 converge.

1. Démontrer que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont des suites appartenant à ℓ^2, la série de terme général $|u_n v_n|$ converge.
2. Démontrer que ℓ^2 est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.
3. Pour toutes suites $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartenant à ℓ^2, on note $\varphi(u,v) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n v_n$.
Démontrer que l'application $\varphi : \ell^2 \times \ell^2 \to \mathbb{R}$ ainsi définie est un produit scalaire sur ℓ^2.
4. Démontrer que pour toutes suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de ℓ^2,
$$\left|\sum_{n=0}^{+\infty} u_n v_n\right| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n v_n| \leqslant \sqrt{\sum_{n=0}^{+\infty} u_n^2}\sqrt{\sum_{n=0}^{+\infty} v_n^2}.$$