Algèbre 5 – Normes, Orthogonalité

Exercice 1 – Montrer que les applications N ci-dessous définissent des normes sur E. Ces normes sont-elles euclidiennes ?

1. $E = \mathbb{R}^n$, $\forall X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in E, \quad N(X) = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$.
2. $E = \mathbb{R}_n[X]$, $\forall P \in \mathbb{R}_n[X]$, $N(X) = \sum_{k=0}^{n} P^2(k)$.

Exercice 2 – Soit $n \in \mathbb{N}^*$ un entier strictement positif.

1. Montrer que $n^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} \sqrt{i}\right)^2 \leqslant \dfrac{n^2(n+1)}{2}$.
2. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$,
$$n \leqslant \sum_{i=1}^{n} \sqrt[2^k]{i} \leqslant n \cdot \sqrt[2^k]{\frac{n+1}{2}}$$

Exercice 3 – Soit f une application de $[0,1]$ vers $\mathbb{R}$, continue et strictement positive sur $[0,1]$. Démontrer que
$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{f(t)} \geqslant \frac{1}{\displaystyle\int_0^1 f(t)\ \mathrm{d}t}.$$
Donner une condition nécéssaire et suffisante pour que l'inégalité précédente soit une égalité.

Exercice 4 – Les familles suivantes sont-elles des bases orthogonales de $\mathbb{R}^3$ (muni du produit scalaire usuel) ? Sont-elles orthonormales ?

1. $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$ 2. $\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$.

Exercice 5 – Déterminer une base de l'orthogonal de F dans E dans les cas suivants :

1. $E = \mathbb{R}^3$, produit scalaire usuel, $F = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$;
2. $E = \mathbb{R}^3$, produit scalaire usuel, $F = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$
3. $E = \mathbb{R}^5$, produit scalaire usuel, $F = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$
4. $E = \mathbb{R}_3[X]$, $\langle P, Q \rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)\ \mathrm{d}t$, $F = \mathrm{Vect}(X, X^2+1)$.

Exercice 6 –

1. Déterminer un produit scalaire φ sur $\mathbb{R}^2$ tel que $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ pour ce produit scalaire. On pourra exprimer la matrice de φ dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$.
2. On demande de plus que $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Déterminer un produit scalaire convenable.
3. On demande en plus de l'hypothèse de la question 1 que $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Peut-on trouver un tel produit scalaire ?

Exercice 7 –

1. Soit $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$, et $\mathcal{C} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$. Montrer qu'il existe un unique produit scalaire φ sur $\mathbb{R}^3$ dont on exprimera la matrice dans la base canonique $\mathcal{B}$, tel que $\mathcal{C}$ soit une base orthonormale de $\mathbb{R}^3$.
2. Plus généralement, soit E un espace vectoriel de dimension finie, et soit $\mathcal{B}$ une base de E. Justifier qu'il existe un unique produit scalaire sur E tel que $\mathcal{B}$ soit une base orthonormale pour ce produit scalaire.

Exercice 8 – Déterminer une base orthonormale du sous-espace F de E dans les cas suivants :

1. $E = \mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel, $F = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$
2. $E = \mathbb{R}^4$ muni du produit scalaire usuel, $F = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$
3. $E = \mathbb{R}_3[X]$, muni de $\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^1 P(t)Q(t)\ \mathrm{d}t$, $F = \mathrm{Vect}(1, X, X^2)$.

Exercice 9 – On se place dans $\mathbb{R}^4$ muni du produit scalaire canonique. On pose $u_1 = (1, 0, 0, -1)$ et $u_2 = (-1, -1, 1, 1)$

1. Déterminer une base orthonormale de $F = \text{Vect}(u_1, u_2)$
2. Déterminer une base orthonormale de $E^{\perp}$.
3. En déduire une base $\mathcal{B}$ orthonormale de $\mathbb{R}^4$, différente de la base canonique.
4. Déterminer dans la base β les composantes de $v = (1, 2, -1, -2)$, et de $p(v)$, le projeté orthogonal de v sur F.

Exercice 10 – Soit, F le sev de $\mathbb{R}^4$ défini par $F = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}\right)$. Soit $X = \begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}$.

Déterminer le projeté orthogonal Y de X sur F.

Exercice 11 – Soient $n \in \mathbb{N}^*$, et $a_0, a_1, \ldots, a_n$ des réels.

1. Montrer que l'application $(P, Q) \mapsto \displaystyle\sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(a_k)Q^{(k)}(a_k)$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.
2. On suppose dans cette question que $n = 2$, $a_0 = 1$, $a_1 = 2$ et $a_2 = 3$. Déterminer une base orthonormale de $\mathbb{R}_2[X]$.

Exercice 12 – Soit Q l'application définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$\forall X = \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, \quad Q(X) = 2x^2 + 5y^2 - 2xy.$$

1. Justifier que pour tout $X \in \mathbb{R}^2$, $Q(X) \geqslant 0$.
2. On définit, pour tout $X \in \mathbb{R}^2$, $N(X) = \sqrt{Q(X)}$. Montrer que N est une norme euclidienne sur $\mathbb{R}^2$.
3. Déterminer une base orthonormale de $\mathbb{R}^2$ pour le produit scalaire associé à N.

Exercice 13 – Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Soient F et G des sous-espaces vectoriels de E.

1. Montrer que si $F \subset G$, alors $G^{\perp} \subset F^{\perp}$.
2. Montrer que $(F + G)^{\perp} = F^{\perp} \cap G^{\perp}$.

Exercice 14 – Soit $E = \mathbb{R}[X]$. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_n = (X^2 - 1)^n$ et $Q_n = P_n^{(n)}$ (polynômes de Legendre).

1. Vérifier que l'application $\varphi : E^2 \to \mathbb{R}$ définie pour tout $(P, Q) \in E^2$ par
$$\varphi(P, Q) = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\ \text{d}t$$
est un produit scalaire sur E.
On suppose désormais E muni de ce produit scalaire, et on note $\Phi(P, Q) = \langle P, Q \rangle$.
2. Calculer Q_0, Q_1, Q_2.
3. Déterminer les éventuelles racines de P_n, ainsi que leur ordre de multiplicité.
4. Déterminer le degré de Q_n et son coefficient dominant.
5. Prouver, par récurrence sur k, que, pour tout entier $k \in [\![0, 1]\!]$, $P_n^{(k)}$ admet au moins k racines réelles distinctes dans $]-1, 1[$.
6. À l'aide d'intégrations par parties, prouver que pour tout couple $(n, m) \in \mathbb{N}^2$ tel que $n \geqslant m$,
$$\langle Q_n, Q_m \rangle = (-1)^m (2m)! \int_{-1}^{1} P_n^{n-m}(t)\ \text{d}t.$$
En déduire que $(Q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une famille orthogonale.
7. Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|Q_n\|$.
8. Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose, pour tout entier $k \in [\![0, n]\!]$, $W_k = \dfrac{Q_k}{\|Q_k\|}$. Démontrer que $(W_0, \ldots, W_n)$ est une base orthonormale du sev $\mathbb{R}_n[X]$ de $\mathbb{R}[X]$, et que cette base est l'orthonormalisée de Schmidt de la base canonique $(1, X, \ldots, X^n)$.