Analyse 1 – Topologie, suites numériques : révisions

Exercice 1 – Soit E un sous-ensemble de $\mathbb{R}$. On appelle *recouvrement de E par des ouverts* une famille $(U_i)_{i\in I}$ d'ouverts tels que $E \subset \bigcup_{i\in I} U_i$ (les unions ne sont pas forcément disjointes). Le recouvrement est dit *fini* si la famille $(U_i)_{i\in I}$ est une famille finie.
On suppose que E vérifie la propriété suivante (propriété de Borel-Lebesgue) : de tout recouvrement de E par des ouverts de $\mathbb{R}$, on peut extraire un recouvrement fini.

1. Montrer que E est fermé.
   Indication : On pourra raisonner par la contraposée, et supposant que E n'est pas fermé, considérer un point $x \notin E$ tel que pour tout $r \in \mathbb{R}_+^*$, $B(x,r) \cap E \neq \varnothing$.
2. Montrer que E est borné.
   Indication : Considérer un recouvrement par des boules de même rayon $r > 0$.
3. Mêmes questions si E est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$.

Exercice 2 – Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \dfrac{-1}{u_n+1}$. Cette suite converge-t-elle ?

Exercice 3 – Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergeant vers ℓ (fini ou infini) , et $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une bijection. Montrer que $v_n = u_{f(n)}$ converge vers la même limite que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 4 – Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à termes dans $\mathbb{R}_+^*$. On suppose que $\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel ℓ.

1. Montrer que si $\ell < 1$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
2. Montrer que si $\ell > 1$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $+\infty$.
3. Soit $a, b \in \mathbb{R}^+$. Montrer que $\left(\dfrac{a^n}{n^b}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0 si $a < 1$; vers $+\infty$ si $a > 1$. Cas $a = 1$?
4. Soit $a \in \mathbb{R}$. Montrer que $\left(\dfrac{a^n}{n!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

Exercice 5 – Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.

1. On suppose que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$. Montrer que $\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$ admet un plus petit élément.
2. On suppose que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel fini ℓ. Montrer que $\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$ admet un plus petit ou un plus grand élément. Décrire les suites convergentes $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour lesquelles $\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$ n'admet pas à la fois un plus petit et un plus grand élément.
3. On suppose que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à termes positifs, et qu'elle tend vers 0. Montrer qu'il existe une infinité d'entiers $p \in \mathbb{N}$ tels que pour tout $n \geqslant p$, $u_n \leqslant u_p$.

Exercice 6 – (Moyenne de Cesaro)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite réelle et soit $\forall n \in \mathbb{N}^*,\quad v_n = \dfrac{1}{n}(u_1 + \cdots + u_n)$

1. Montrer que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend vers ℓ (fini ou infini), alors $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend aussi vers ℓ (on pourra commencer par le cas $\ell = 0$).
2. Montrer que si $(u_{n+1} - u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend vers ℓ (fini ou infini), alors $\left(\dfrac{u_n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend vers ℓ.
3. On suppose que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est à termes dans $\mathbb{R}_+^*$. Montrer que si $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers ℓ, alors $\left(u_n^{1/n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge aussi vers ℓ.
4. Déterminer la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $u_n = \dbinom{2n}{n}^{1/n}$.

Exercice 7 – Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 0$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{12 - u_n}$.

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie, et que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant \sqrt{12}$.
2. On considère les deux suites extraites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définies pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $x_n = u_{2n}$ et $y_n = u_{2n+1}$. Montrer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont monotones. Quel est leur sens de variation ?
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n \leqslant y_n \leqslant u_1 \leqslant 4$.
4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|u_{n+1} - u_n| \leqslant \dfrac{1}{4\sqrt{2}}|u_n - u_{n-1}|$.
5. Montrer que les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Déterminer sa limite.

Exercice 8 – Étudier la convergence des suites définies par les récurrences ci-dessous :

(a) $u_0 \geqslant \dfrac{-3}{2},\ u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 3}$ (b) $u_0 > 0,\ u_{n+1} = \dfrac{2}{u_n^2}$ (c) $u_0 \neq 1,\ u_{n+1} = \dfrac{1+u_n}{1-u_n}$

(d) $u_0 \in \mathbb{R},\ u_{n+1} = \dfrac{1}{3}(4 - u_n^2)$ (e) $u_0 \neq -5,\ u_{n+1} = \dfrac{4u_n + 2}{u_n + 5}$ (f) $u_0 \in \mathbb{R},\ u_{n+1} = \cos(u_n)$.

Exercice 9 – (Algorithme de Héron) Soit $a > 0$, et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 > 0$ et

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right).$$

1. Montrer que (u_n) converge, et déterminer sa limite.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\left|u_{n+1} - \sqrt{a}\right| \leqslant \dfrac{(u_n - \sqrt{a})^2}{2\sqrt{a}}$.
3. En déduire une majoration de $|u_n - \sqrt{a}|$ en fonction de a, u_1 et n.
4. Donner une condition pour que cette majoration puisse s'exprimer en fonction de a, u_0 et n. Quelle majoration obtient-on ?
5. On prend $u_0 = 2$. Déterminer une valeur de n aussi petite que possible pour laquelle u_n donne une valeur approchée de $\sqrt{2}$ à 10^{-100} près. Reprendre la question à l'aide cette fois d'une majoration de $|u_n - \sqrt{a}|$ en fonction de a, u_1 et n.

Exercice 10 – *On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0,+\infty[$ par $f(x)=\sqrt{1+x}$, et la fonction g définie sur $]1,+\infty[$ par $g(x)=\dfrac{1}{x-1}$.*
L'objet de l'exercice est l'étude de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres réels déterminée par la condition initiale $u_0=1$ et les relations de récurrence, valables pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$u_{2n+1}=f(u_{2n}) \qquad \text{et} \qquad u_{2n+2}=g(u_{2n+1}).$$

1. Justifier l'existence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{2n+1}>1$ et $u_{2n+2}>0$.
2. Étudier le sens de variation de $g\circ f$ sur son domaine de définition.
3. En déduire que $(u_{4n})_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone, et déterminer son sens de variation.
4. Montrer que $(u_{4n})_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite finie, et déterminer cette limite ℓ.
5. Vérifier que ℓ est un point fixe de f et de g.
6. Exprimer $(u_{4n+1})_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_{4n+2})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{4n+3})_{n\in\mathbb{N}}$ en fonction de $(u_{4n})_{n\in\mathbb{N}}$, f et g. En déduire que ces trois suites convergent vers des limites que l'on déterminera. Préciser l'éventuelle monotonie de ces suites.
7. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Quelle est sa limite ?

Exercice 11 – Soit $x\in\mathbb{R}$. Montrer que $\left(\dfrac{\mathrm{E}(nx)}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge. Quelle est sa limite ? Montrer que la convergence est en $O\left(\frac{1}{n}\right)$.

Exercice 12 – Soit $a\in]1,+\infty[$, et soit pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $S_n=1+\dfrac{1}{2^a}+\dfrac{1}{3^a}+\cdots+\dfrac{1}{n^a}$.

1. Montrer que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.
2. Soit pour tout $n\in\mathbb{N}$, $v_n=S_{2^n}$. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $v_{n+1}-v_n\leqslant\dfrac{1}{2^{n(a-1)}}$.
   En déduire que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, puis que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Soit ℓ la limite de $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. Montrer que la convergence est en $O\left(\frac{1}{n^{a-1}}\right)$, c'est-à-dire : $|S_n-\ell|=O\left(\frac{1}{n^{a-1}}\right)$.

Exercice 13 – Soit, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}$, et $u_n=\dfrac{S_n}{\sqrt{n}}$, et $v_n=S_n-2\sqrt{n}$.

1. Montrer que pour tout $n>0$, $S_n\leqslant\sqrt{n}+\sqrt{n-1}$.
2. Montrer que pour tout $n>0$, $2\sqrt{n+1}-2\leqslant S_n$.
3. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergent. Déterminer la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, et justifier que la convergence est en $O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$.
4. En déduire un équivalent simple de $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ en $+\infty$, puis une expression de S_n à $o(1)$ près en fonction de la limite α de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Exercice 14 – Expliciter, et déterminer un équivalent simple des suites définies par les récurrences suivantes :

1. $u_0=0$ et $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=3u_n+4$;
2. $v_0=1$, $v_1=0$ et $\forall n\in\mathbb{N}$, $v_{n+2}=\sqrt{2}\cdot v_{n+1}-\dfrac{v_n}{2}$.
3. $w_0=1$ et $\forall n\in\mathbb{N}$, $w_{n+1}=2w_n+2n-1$.
4. $x_0=1$, $x_1=4$, $\forall n\in\mathbb{N}$, $\quad x_{n+2}=-2x_{n+1}+3x_n-4$.

Exercice 15 – Soit $a \in \mathbb{R}^*$, et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*$. Soit pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \left(1 + \dfrac{a}{n^\alpha}\right)^{n^\beta}$. Déterminer la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Exercice 16 – Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$u_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2k} \qquad v_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{2k}{2k+1} \qquad w_n = \frac{u_n}{v_n}.$$

1. Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont décroissantes et minorées par 0.
2. (a) Montrer que pour tout $t \in]-1, +\infty[$, $\dfrac{t}{t+1} < \dfrac{t+1}{t+2}$.

   (b) En considérant u_n^2, et en remarquant que $v_n = \dfrac{1}{(2n+1)u_n}$, établir alors que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
   $$\frac{1}{2\sqrt{n}} \leqslant u_n < \frac{1}{\sqrt{2n+1}} < v_n \leqslant \frac{2\sqrt{n}}{2n+1}.$$
3. (a) Montrer que $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et qu'elle converge vers un réel $\lambda \in \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right]$.

   (b) En déduire que $u_n \underset{+\infty}{\sim} \lambda v_n$.
4. En considérant la suite $(u_n v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, établir enfin que
   $$u_n \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\lambda}{2n}} \text{ et } v_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2\lambda n}}.$$

Exercice 17 – Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit le polynôme P_n par : $\forall x \in \mathbb{R},\ P_n(x) = -1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x^k$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que l'équation $P_n(x) = 0$ admet une unique solution x_n dans $\mathbb{R}_+^*$, et que $0 < x_n \leqslant 1$.
2. Montrer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge. On note ℓ sa limite.
3. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} (x_n)^{n+1} = 0$, puis que $\ell = \dfrac{1}{2}$.
4. Montrer que $x_n - \dfrac{1}{2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+2}$.

Exercice 18 – (Oral HEC 1991) – Soit n un entier supérieur ou égal à 3. Soit $f_n : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ l'application définie pour tout $x \in [0, +\infty[$ par $f_n(x) = x^n - nx + 1$.

1. Prouver l'existence de deux racines α_n et β_n de f_n telles que $0 < \alpha_n < 1 < \beta_n$.
2. Montrer que $(\alpha_n)_{n\geqslant 3}$ converge et calculer sa limite.
3. Montrer que $\alpha_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$.
4. (a) Montrer que pour tout $n \geqslant 3$, $f_n\left(1 + \dfrac{2}{\sqrt{n}}\right) \geqslant n$.

   (b) En déduire un encadrement de $(\beta_n)_{n\geqslant 3}$ et sa limite ℓ.

   (c) En remarquant que pour tout $n \geqslant 3$, $n\ln(\beta_n) = \ln(n\beta_n - 1)$, trouver un équivalent de $\ln(\beta_n)$, et en déduire que $\beta_n - \ell \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\ln n}{n}$.