Analyse 2 – Séries numériques : révisions

Exercice 1 – Nature des séries de terme général u_n :

1. $u_n = \dfrac{\ln n}{n^5}$
2. $u_n = \mathrm{e}^{-\sqrt{5+n}}$
3. $u_n = \dfrac{n^4 \ln(3n)}{\mathrm{e}^{2n}}$
4. $u_n = \ln\left(\dfrac{3+\sin\frac{1}{n}}{3-\sin\frac{1}{n}}\right)$
5. $u_n = \dfrac{n+\mathrm{e}^{-n}}{(n+1)^3}$
6. $u_n = \left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n$
7. $u_n = \dfrac{(-1)^n \cos n}{n^2\sqrt{n}}$
8. $u_n = \sqrt{n^2-1}-n$
9. $u_n = \left(\dfrac{n-1}{n}\right)^{n\sqrt{n}}$
10. $u_n = \dfrac{1}{n^2+\sin(n^6)}$
11. $u_n = \dfrac{\mathrm{e}^{-2n}+n}{n^3+1}$
12. $u_n = \dfrac{1}{\mathrm{e}^{(2+\frac{3}{n})\ln n}}$
13. $u_n = (-1)^n n\mathrm{e}^{-n}$
14. $u_n = \sin n$
15. $u_n = a^{-n^\alpha}, a>0$
16. $u_n = \dfrac{1}{n^{\ln n}(\ln n)^n}$
17. $u_n = \dfrac{n^n}{n!\ a^n},\ |a| \neq \mathrm{e},\ a \neq 0$
18. $u_n = \dfrac{1}{n}\ln n \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$
19. $u_n = \mathrm{e} - \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$
20. $u_n = \ln(\cos\dfrac{1}{n})$
21. $u_n = \mathrm{e}^{-\sqrt{n}}\ln n$

Exercice 2 – Nature et somme éventuelle des séries suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}}(n+1)\cdot\frac{1}{n!}$
2. $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}}(n^3+2n^2-3n-1)\cdot\frac{2^n}{n!}$
3. $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}}(n^2+2n-1)\cdot\frac{1}{2^n}$
4. $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{n(n+1)3^n}$
5. $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{4^n}{(2n)!}$ et $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{2^{2n+1}}{(2n+1)!}$.
6. $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}}\ln\frac{\cos(\mathrm{e}^{-(n+1)})}{\cos(e^{-n})}$

Exercice 3 – Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de réel positifs. Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1. Si pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}<1$, alors la série $\sum a_n$ est convergente.
2. Si $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-b_n)=0$ et $\sum a_n$ est convergente, alors la série $\sum b_n$ est convergente.
3. Si la série de terme général $\inf\left(a_n,\dfrac{1}{n}\right)$ est convergente, alors la série $\sum a_n$ est convergente.
4. Si $\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+1}+\cdots+a_{2n})=0$, alors la série $\sum a_n$ est convergente.

Exercice 4 – Soit pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, $S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$, et $u_n=S_n-\ln n$.

1. Montrer que la série de terme général $u_{n+1}-u_n$ converge.
2. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers une limite $C\in\mathbb{R}_+$. Ce réel C est appelée *constante d'Euler*.
3. Donner un équivalent simple de (S_n).

Exercice 5 – Soit $a>0$, on pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \dfrac{a(a+1)\cdots(a+n-1)}{n^{a-1}(n\,!)}$.

1. Étudier la convergence de la série de terme général $\ln \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$.
2. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ a une limite strictement positive.

Exercice 6 – Soient $\sum a_n$ et $\sum b_n$ deux séries convergentes à termes positifs.

1. Montrer que les séries de termes généraux $\min(a_n, b_n)$ et $\max(a_n, b_n)$ convergent
2. Montrer que $\sum \sqrt{a_n b_n}$ converge.
3. En déduire que, si $\sum a_n$ converge, alors $\sum \sqrt{a_n a_{n+1}}$ converge. La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 7 – Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à termes positifs, et

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n = \frac{1}{n}(u_n + u_{n+1} + \cdots + u_{2n-1}).$$

Montrer que $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

Exercice 8 – Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs. Montrer que les séries $\sum u_n$ et $\sum \dfrac{u_n}{1+u_n}$ sont de même nature.

Exercice 9 – Soit $\sum u_n$ une série convergente à termes positifs.

1. Montrer que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} nu_n = 0$.
2. Montrer par un contre-exemple que cela n'est pas vrai si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas décroissante.

Exercice 10 – **(Oral HEC)** – Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par $u_1 = 1$ et :

$$\forall n > 1, u_n = \left(\frac{1}{n} + u_{n-1}^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

1. Étudier le signe, la monotonie et la convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
2. Donner un équivalent simple de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
3. Déterminer la nature de la série de terme général $v_n = \dfrac{1}{nu_n^2}$.
4. Donner un programme en Pascal permettant de calculer u_n pour n allant de 1 à 50.

Exercice 11 – **(Oral HEC)** – **Méthode de Stirling pour le calcul approché de $\zeta(3)$.**

La fonction ζ de Riemann est définie sur son domaine de définition par $\zeta(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$.

1. Déterminer le domaine de définition de ζ.

Le but de l'exercice est de trouver une valeur approchée à 10^{-8} près de $\zeta(3)$. On note $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3}$.

2. (a) Établir que $\dfrac{1}{2(n+1)^2} \leqslant \zeta(3) - S_n \leqslant \dfrac{1}{2n^2}$.
   (b) Donner une minoration de la valeur minimale n_0 pour laquelle S_{n_0} soit une valeur approchée à 10^{-8} près de $\zeta(3)$?

(c) En admettant une erreur d'arrondi de 10^{-11} sur chaque quotient $\frac{1}{k^3}$, montrer que le calcul effectif de $\zeta(3)$ à 10^{-8} près est impossible par cette méthode.

3. Déterminer des réels a, b et c tels que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{1}{n^3} = \frac{a}{n(n+1)(n+2)} + \frac{b}{n(n+1)(n+2)(n+3)} + \frac{c}{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)} + \varepsilon_n,$$

où $\lim\limits_{n\to+\infty} n^5 \varepsilon_n = 0$. Vérifier que :

$$\varepsilon_n = \frac{50n+24}{n^3(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)} \qquad \text{et} \qquad 0 < \varepsilon_n < \frac{50}{n^6}.$$

4. En remarquant que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{n(n+1)\cdots(n+m-1)} - \frac{1}{(n+1)\cdots(n+m)} = \frac{m}{n(n+1)\cdots(n+m)},$$

calculer :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)} \qquad \text{et} \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}.$$

5. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $T_n = \dfrac{1}{2\cdot 2!} + \dfrac{3}{3\cdot 3!} + \dfrac{11}{4\cdot 4!} + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{50k+24}{k^3(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}$.
Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 < \zeta(3) - T_n < \dfrac{10}{n^5}$.

6. Quelle valeur de n_0 suffit-il de prendre pour que T_{n_0} soit une valeur approchée de $\zeta(3)$ à 10^{-8} près ?

Exercice 12 – Nature des séries de terme général u_n :

(*a*) $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n - \sqrt{n}}$ (*b*) $u_n = (-1)^n \mathrm{e}^{\sqrt{6n+5}-n}$ (*c*) $u_n = \dfrac{\ln n + (-1)^n 10 \ln(\ln n)}{\sqrt{n}}$

(*d*) $u_n = (-1)^n \mathrm{e}^{\frac{1}{n}}$ (*e*) $u_n = \sqrt{n + (-1)^n} - \sqrt{n}$ (*f*) $u_n = \ln n \ln\left(1 + \dfrac{(-1)^n}{n}\right)$

(*g*) $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n + (-1)^{n+1}}$ (*h*) $u_n = (-1)^n \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{(1+t)^n}$ (*i*) $u_n = \dfrac{(-1)^n \ln n + 1}{n \ln n}$

(*j*) $u_n = \dfrac{n+1}{\sqrt{n} - (-1)^n \cdot n}$ (*k*) $u_n = \displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \mathrm{e}^{-\sqrt{\ln x}} \sin x \, \mathrm{d}x$

Exercice 13 – Soit (u_n) définie par $u_0 > 0$ et $\forall n \geqslant 0$, $u_{n+1} = \sin u_n$. Montrer que $\sum (-1)^n u_n$ converge.

Exercice 14 –

1. Déterminer, pour tout $\alpha \in]-\infty, 1]$, un équivalent de $\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
2. Déterminer, pour tout $\alpha \in]1, +\infty[$, un équivalent de $\left(\sum\limits_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Indication : on pourra utiliser une comparaison avec une intégrale.

Exercice 15 – Déterminer un équivalent de $\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\ln k}{k}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Exercice 16 – Le but de cet exercice est de montrer que la série $\sum \dfrac{\cos\sqrt{n}}{\sqrt{n}}$ diverge.

1. Soit, pour $n \geqslant 1$, $\alpha_n = \mathrm{E}\left(\left(-\frac{\pi}{4} + 2n\pi\right)^2\right)$ et $\beta_n = \mathrm{E}\left(\left(\frac{\pi}{4} + 2n\pi\right)^2\right)$. Soit k dans $\mathbb{N}$ tel que $\alpha_n < k \leqslant \beta_n$. Minorer $\cos\sqrt{k}$.
2. En déduire que $\displaystyle\sum_{k=\alpha_n+1}^{\beta_n} \frac{\cos\sqrt{k}}{\sqrt{k}} \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{2n\pi^2 - 1}{\frac{\pi}{4} + 2n\pi}$.
3. En déduire que la série $\sum \dfrac{\cos\sqrt{n}}{\sqrt{n}}$ diverge.

Exercice 17 – Soit $\sum u_n$ une série telle que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit décroissante et ait pour limite 0.

1. Montrer que, pour tout $p \geqslant 0$, on a
$$2^p u_{2^{p+1}} \leqslant \sum_{n=2^p+1}^{n=2^{p+1}} u_n \leq 2^p u_{2^p} .$$
2. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = 2^n u_{2^n}$. Montrer que les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.
3. Étudier la convergence de la série de terme général $a_n = \dfrac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$ en fonction de α et β.

Exercice 18 – Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sin u_n$.

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
2. En étudiant la série de terme général $u_n - u_{n+1}$, montrer que la série de terme général u_n^3 est convergente.
3. Montrer que les séries de termes généraux : $\ln \dfrac{\sin u_n}{u_n}$ et u_n^2 sont divergentes.
4. Étudier la convergence de la série $\sum u_n x^n$ pour toutes les valeurs du réel x.