

Analyse 3 – Intégrales impropres (1)

Exercice 1 – Étudier la nature et, en cas de convergence, calculer la valeur des intégrales suivantes.

1. $I_1 = \int_0^1 \frac{dx}{x(x-1)}$
2. $I_2 = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)(x+2)}$
3. $I_3 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan x \, dx$
4. $I_4 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}} \, dx$
5. $I_5 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\cos^2 x}$
6. $I_6 = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(x^2+1)(x+1)}$
7. $I_7 = \int_1^2 \frac{dt}{t(\ln t)^\beta}, \beta \in \mathbb{R}$
8. $I_8 = \int_3^{+\infty} \frac{dt}{t \ln t (\ln \ln t)^\beta}, \beta \in \mathbb{R}.$

Exercice 2 – Soit f une fonction continue sur $[a, +\infty[$, $a \in \mathbb{R}$. Montrer que si f admet une limite non nulle en $+\infty$, alors $\int_a^{+\infty} f(t) \, dt$ diverge.

Exercice 3 – Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n(x) = e^{-(n+x)}.$$

1. Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0$ (on dit que la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge *simplement* vers la fonction nulle, « simplement » signifiant point par point)
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, justifier la convergence et calculer la valeur de l'intégrale :

$$I_n = \int_0^{+\infty} f_n(t) \, dt.$$

3. Peut-on intervertir limite et intégrale (impropre ou non d'ailleurs) ?

Exercice 4 – Soit $I_n = \int_1^{+\infty} \frac{\ln(nt)}{(t^2+t+1)^n} \, dt$, $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie, et calculer sa limite.

Exercice 5 –

1. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin x}{2+x^3} \right)^n \, dx$.

Montrer que pour tout n , I_n est bien définie, et que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 0

Indication : on pourra utiliser la relation de Chasles, en coupant l'intégrale en deux en $a \in \mathbb{R}_+^*$.

2. Même question avec $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^5+1)^n}$

Exercice 6 – Étudier la nature des intégrales impropres suivantes :

1. $I_1 = \int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{x}} \, dx$
2. $I_2 = \int_0^{+\infty} x \ln x e^{-x^\alpha} \, dx, \alpha \in \mathbb{R}$
3. $I_3 = \int_0^{+\infty} \frac{1}{x(x-1)(x-2)} \, dx$
4. $I_4 = \int_0^4 \frac{1}{\sqrt{x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}} \, dx$
5. $I_5 = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x \ln(\ln x)} \, dx$
6. $I_6 = \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x+1}} \right) \, dx$
7. $I_7 = \int_0^1 \ln x \, dx$
8. $I_8 = \int_0^1 (\ln(x+1) - \ln x) \, dx$
9. $I_9 = \int_0^1 (\ln(x^2+1) - \ln x^2) \, dx$
10. $I_{10} = \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{|\ln x|}}{\sqrt{x} e^{2x}} \, dx$
11. $I_{11} = \int_0^{+\infty} \frac{\sin 1x^2}{|\ln x| \sqrt{x}} \, dx$
12. $I_{12} = \int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{\ln(1-x)} \, dx$
13. $I_{13} = \int_1^{+\infty} (\sqrt{x^2+1} - \sqrt[3]{x^3+1}) \, dx$
14. $I_{14} = \int_1^{+\infty} e - \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x \, dx$
15. $I_{15} = \int_3^{+\infty} (\ln(\ln x))^{-\ln x} \, dx$
16. $I_{16} = \int_2^{+\infty} (\ln x)^{-\ln(\ln x)} \, dx$

Exercice 7 – Soit f une fonction continue sur $[0,1[$. On suppose que $\int_0^1 f(x) \, dx$ converge absolument.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\int_0^1 x^n f(x) \, dx$ converge.
2. Soit $\varepsilon > 0$

- (a) Montrer qu'il existe $a \in]0,1[$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\left| \int_a^1 x^n f(x) \, dx \right| < \frac{\varepsilon}{2}$.
- (b) Ce a étant choisi, montrer qu'il existe un réel M tel que

$$\left| \int_0^a x^n f(x) \, dx \right| \leq M \frac{a^{n+1}}{n+1}.$$

- (c) Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 x^n f(x) \, dx = 0$.

Exercice 8 – Soit, pour tout réel x pour lequel l'intégrale converge,

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(t+2)}{t^2+x} \, dt$$

1. Déterminer le domaine de définition de f .
2. Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ (on pourra faire le changement de variables $u = \frac{t}{\sqrt{x}}$)
3. Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$.

Exercice 9 – Soit f une fonction de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$ de classe $\mathcal{C}^1$, telle qu'il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $f'(x) \geq \alpha$. Montrer que $\int_1^{+\infty} \frac{f(x)}{x^2} \, dx$ diverge.

Exercice 10 – Nature et existence des intégrales suivantes :

1. $\int_1^{+\infty} \frac{2t \ln t}{(1+t^2)^2} dt$
4. $\int_0^1 \frac{t^\alpha \ln t}{dt}, \alpha > -1.$
7. $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+x+1} dx$
2. $\int_1^{+\infty} \frac{1}{xe^{\sqrt{\ln x}}} dx$
5. $\int_0^{+\infty} \left(1 - x \operatorname{Arctan} \frac{1}{x}\right) dx$
8. $\int_1^2 \frac{dt}{\sqrt{(x-1)(x-2)}}.$
3. $\int_0^1 \frac{t \ln t}{(1-t^2)^{\frac{3}{2}}} dt$
6. $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+e^x}} dx$

Exercice 11 –

1. Justifier la convergence et calculer la valeur de $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^3}.$
2. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*, I_n = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^3)^n}.$
 - (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, I_n$ converge.
 - (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, I_{n+1} = \frac{3n-1}{3n} I_n.$
 - (c) En déduire la valeur de I_n en fonction de $n.$

Exercice 12 – Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} t^n e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$ Convergence de I_n , et valeur.

Exercice 13 –

1. Justifier l'existence de $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x) dx$ et de $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos x) dx.$
2. Montrer que $I = J.$
3. Du calcul de $I + J$, déduire la valeur de $I.$
4. justifier l'existence, et calculer la valeur de $\int_0^{\pi} \ln(1 - \cos x) dx.$

Exercice 14 – Comparaison par équivalences : un contre-exemple

1. Montrer que $\frac{\sin t}{t} \underset{+\infty}{\sim} \frac{\sin t}{t} \left(1 + \frac{\sin t}{\ln t}\right) dt$
2. Montrer que $\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ converge.
3. (a) Montrer que $t \mapsto \frac{1}{t \ln t}$ est décroissante sur $[\pi, +\infty[.$
- (b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*, \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin^2 t}{t \ln t} dt \geq \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{(n+1) \ln(n+1)}.$
- (c) En déduire que $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t \ln t} dt$ diverge, puis que $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t} \left(1 + \frac{\sin t}{\ln t}\right) dt$ diverge.
4. Conclure.

Exercice 15 – On pose $F(x) = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^x(1+t)}.$

1. Déterminer l'ensemble de définition de $F.$
2. Étudier les variations de $F.$

3. Calculer, pour tout x pour lequel cette expression est définie, $F(x) + F(x+1).$

4. En déduire un équivalent de F au voisinage de 0, puis de $+\infty.$

Exercice 16 – Limite sous le signe somme : un contre-exemple

Soit f une application de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$, continue et bornée.

1. Justifier l'existence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, de $\int_0^{+\infty} \frac{nf(x)}{1+n^2x^2} dx.$
2. Justifier, pour tout $n \in \mathbb{N}^*,$ l'égalité : $\int_0^{+\infty} \frac{nf(x)}{1+n^2x^2} dx = \int_0^{+\infty} \frac{f\left(\frac{t}{n}\right)}{1+t^2} dt.$
3. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{nf(x)}{1+n^2x^2} dx = \frac{\pi}{2} f(0).$
4. Déterminer, pour tout $x \in \mathbb{R}^*, g(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{nf(x)}{1+n^2x^2} dx.$
5. Justifier que $\int_0^{+\infty} g(x)$ converge et donner sa valeur.
6. A-t-on $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{nf(x)}{1+n^2x^2} dx = \int_0^{+\infty} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{nf(x)}{1+n^2x^2} dx ?$

Exercice 17 – Soit n un entier positif ou nul, et $F_n : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(t^2+x^2)^n}.$

On définit, pour tout $t \in \mathbb{R}_+,$ la fonction f_t sur $\mathbb{R}$ par $f_t(x) = \frac{1}{t^2+x^2}.$

1. Domaine de définition de $F_n ?$
2. On suppose dorénavant que $x > 0.$ Soit h un réel tel que $|h| < \frac{x}{2}.$
 - (a) Soit $t \in \mathbb{R}_+.$ Soit M un majorant de f_t'' sur $[x, x+h]$ (ou $[x+h, x]$). Justifier que :

$$\left| \frac{f_t(x+h) - f_t(x)}{h} - f_t'(x) \right| \leq \frac{h}{2} \cdot M.$$

(b) Calculer $f_t', f_t''.$

(c) Montrer que pour tout y entre x et $x+h,$ on a $|f_t''(y)| \leq \frac{2n(t^2+4(2n+3)x^2)}{(t^2+\frac{x^2}{4})^{n+2}}.$

(d) Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{2n(t^2+4(2n+3)x^2)}{(t^2+\frac{x^2}{4})^{n+2}} dt$ converge

(e) En déduire que F_n est dérivable en x et que

$$F_n'(x) = -2nx \int_0^{+\infty} \frac{1}{(t^2+x^2)^{n+1}} = -2nx F_{n+1}(x)$$

3. Calculer, pour tout $x \in \mathbb{R}_^*, F_1(x).$ En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*,$ et tout $a \in \mathbb{R}_^+ :$

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(t^2+x^2)^n} = \binom{2n-2}{n-1} \frac{\pi}{(2x)^{2n-1}}.$$