Analyse 5 – Intégrales impropres (2) : Autour de la fonction Γ

Exercice 1 – **(Étude de la fonction Γ)**

1. Montrer que pour tout $x > 0$, $\Gamma(x) \geqslant \dfrac{1}{e}\displaystyle\int_0^1 t^{x-1}\,\mathrm{d}t$.
   En déduire que $\lim\limits_{x\to 0^+} \Gamma(x) = +\infty$.
2. Montrer que pour tout $x > 1$, $\Gamma(x) \geqslant 2^{x-1}\displaystyle\int_2^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$.
   En déduire la limite de $\Gamma(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

On pose, pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, f_t la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f_t(x) = t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}$.

3. Montrer que f_t est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$, et calculer f_t' et f_t''.
4. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$, et $h \in \mathbb{R}$ tel que $|h| \leqslant \min\left(\frac{x}{2}, 1\right)$.
   (a) Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$,
   $$\left|\frac{f_t(x+h) - f_t(x)}{h} - f_t'(x)\right| \leqslant \frac{h}{2} M_2(t,x),$$
   où $M_2(t,x) = \begin{cases} (\ln t)^2 \mathrm{e}^{-t} t^x & \text{si } t \geqslant 1 \\ (\ln t)^2 \mathrm{e}^{-t} t^{\frac{x}{2}-1} & \text{si } t < 1. \end{cases}$
   (b) Justifier la convergence des intégrales
   $$\int_0^1 (\ln t)^2 \mathrm{e}^{-t} t^{\frac{x}{2}-1}\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad \int_1^{+\infty} (\ln t)^2 \mathrm{e}^{-t} t^x\,\mathrm{d}t.$$
   (c) En déduire que Γ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,
   $$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} f_t'(x)\,\mathrm{d}t.$$
5. Montrer que la fonction Γ est convexe sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 2 – Pour tout réels x et y, on pose
$$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t.$$

1. (a) Déterminer le domaine de définition de B.
   (b) Justifier que pour tout $(x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, $B(x,y) = B(y,x)$.
   (c) Déterminer une relation entre $B(x+1,y)$ et $B(x,y+1)$. En déduire que
   $$B(x+1,y) = \frac{x}{x+y} B(x,y).$$
   (d) Calculer $B(n+1,y)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $y > 0$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   (a) Montrer que, pour tout $t \geqslant 0$, on a $1 - t \leqslant \mathrm{e}^{-t}$.
   En déduire que pour tout $t \in [0,n]$, on a :
   $$\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \leqslant \mathrm{e}^{-t}.$$
   (b) Montrer que pour tout $t \in [0,n]$, on a :
   $$\left(1 - \frac{t^2}{n}\right)\mathrm{e}^{-t} \leqslant \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n.$$
   On distinguera les cas $t \in [0, \sqrt{n}]$ et $t \in [\sqrt{n}, n]$.
   (c) Des questions a et b, déduire un encadrement de $\displaystyle\int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\,\mathrm{d}t$, pour $x > 0$.
   Conclure que :
   $$\lim_{n\to+\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\,\mathrm{d}t = \Gamma(x).$$
   (d) Exprimer $\displaystyle\int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\,\mathrm{d}t$ en fonction de $B(n+1,x)$. En déduire que
   $$\Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^x n!}{x(x+1)\dots(x+n)}.$$
3. (a) Montrer que quand l'entier n tend vers $+\infty$, on a
   $$B(n+1,y) \underset{+\infty}{\sim} \frac{\Gamma(y)}{n^y}$$
   (b) En déduire que $B(x,y) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\Gamma(y)}{x^y}$.
   (c) Montrer que, pour tous réels x et y strictement positifs,
   $$B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$
   On pourra utiliser le résultat de la question 3 pour montrer que
   $$\frac{\Gamma(x+y)}{\Gamma(x)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{B(x+n,y)n^y}{B(x,y)}.$$