Analyse 6 – Fonctions d'une variable réelle : révisions

Continuité

Exercice 1 – On considère la fonction f définie par : $f(x) = x\sqrt{\frac{1}{x} - E\left(\frac{1}{x}\right)}$.

1. (a) Domaine de définition de f.
   (b) Montrer que f est prolongeable par continuité en 0. Soit g ce prolongement.
   (c) En considérant les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $x_n = \frac{2}{2n+1}$ et $y_n = \frac{1}{n+1}$, étudier la limite éventuelle de $h : x \mapsto \frac{f(x)}{x}$.
2. Étudier la continuité de f sur $]\frac{2}{5}, 1[$.
3. Étudier la continuité de f sur $]0, 1[$.
4. Étudier la continuité de g sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 2 – Déterminer toutes les applications f dans chacun des cas suivants :

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue, et $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x + y) = f(x) + f(y)$.
2. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue, et $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x)+f(y)}{2}$.
3. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue, et $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x + y) = f(x)f(y)$.
4. $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ continue, et $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, $f(xy) = f(x) + f(y)$.

Exercice 3 – Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application continue et surjective telle que pour tout $y \in \mathbb{R}$, $f^{-1}(y)$ est un sous-ensemble borné de $\mathbb{R}$. Montrer que f admet des limites infinies en $+\infty$ et $-\infty$, de signe opposé.

Exercice 4 – Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$. Montrer que f admet une borne inférieure, et que celle-ci est atteinte.

Exercice 5 – Soit I un intervalle, et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(I) \subset \mathbb{Q}$. Montrer que f est constante.

Exercice 6 – Montrer qu'il n'existe pas de bijection continue de $\mathbb{R}^*$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 7 – Soit $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$, continues sur $[a, b]$, telles que $f(a) = g(b)$ et $f(b) = g(a)$. Montrer qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = g(c)$.

Exercice 8 – Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $f \circ f(a) = a$. Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $f(c) = c$.

Exercice 9 – Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(0) = f(1)$.

1. Montrer qu'il existe $c \in [0, \frac{1}{2}]$ tel que $f(c) = f(c + \frac{1}{2})$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. Montrer qu'il existe $c \in [0, 1 - \frac{1}{n}]$ tel que $f(c) = f(c + \frac{1}{n})$.

Exercice 10 – Soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ croissante telle que $g : x \mapsto \frac{f(x)}{x}$ est décroissante.

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}_*^+$.
2. Montrer que si f n'est pas identiquement nulle, alors f ne s'annule pas.
3. Donner un exemple de telle fonction.

Dérivation

Exercice 11 – Soit f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}$.

1. Montrer que f peut se prolonger par continuité en 0. On note encore f la fonction prolongée.
2. Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, et calculer f'.
3. Montrer que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme P_n tel que $f^{(n)}(x) = \dfrac{P_n(x)}{x^{3n}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}$

Exercice 12 – Soit pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f_n(x) = (x - 1)^n \ln x$. Montrer que f_n est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$, et que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_{n-1}^{(n)}(x) = (n - 1)! \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x^k}$.

Exercice 13 – Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ admettant en $+\infty$ et en $-\infty$ la même limite ℓ. Montrer qu'il existe un réel c tel que $f'(c) = 0$

Exercice 14 – Soit f une fonction définie sur R^+, dérivable sur R_+^*, telle que f admette en $+\infty$ une limite égale à $f(0)$. Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $f'(c) = 0$.

Exercice 15 – Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I.

1. Montrer que si f s'annule en n points distincts, f' s'annule en au moins $n - 1$ points, et que si f s'annule en un infinité de points, alors f' aussi.
2. Soit P un polynôme. Montrer que l'équation $P(x) = \mathrm{e}^x$ admet un nombre fini de solutions
3. Quel est le nombre maximal de solutions réelles de l'équation $x^p - ax + b = 0$?

Exercice 16 – Soit P un polynôme de degré n.

1. Montrer que si P admet n racines réelles distinctes, P' admet $n-1$ racines réelles distinctes, séparant les racines de P.
2. Montrer que si P est scindé (toutes ses racines sont réelles), il en est de même de P'. Localiser les racines de P'.
3. Soit P un polynôme scindé. Montrer que $P^2 + 1$ n'admet pas de racine réelle, et que toutes ses racines complexes sont simples.

Exercice 17 – Soit f une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ telle que $f(0) = f'(0) = 0$, et $f(1) = 0$. Montrer qu'il existe $c \in]0, 1[$ tel que la tangente à la courbe en c passe par l'origine.

Exercice 18 – Soit f une fonction de classe C^1 sur $[0, 1]$ telle que $f(0) = 0$, et $f(1) = 0$. Montrer qu'il existe $c \in]0, 1[$ tel que la tangente à la courbe en c passe par $(c - 1, 0)$.

Exercice 19 – Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que f admette une limite ℓ en $+\infty$.

1. Montrer que la suite $(f(n+1)-f(n))_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0
2. Montrer qu'il existe une suite c_n de limite $+\infty$ telle que $f'(c_n)$ tende vers 0.
3. On suppose que f vérifie $f^2+(1+f')^2 \leqslant 1$ sur $\mathbb{R}$. Montrer que f est décroissante et bornée, puis que f est identiquement nulle.

Exercice 20 – Soit f dérivable sur $\mathbb{R}$. Montrer que si $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = 0$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$. La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 21 – Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0,1]$, telle que $f(0) = f'(0) = f(1) = 0$.

1. Justifier l'existence de bornes supérieures M, M' et M'' de $|f|$, $|f'|$ et $|f''|$, et l'existence d'un réel $\alpha \in]0,1[$ tel que $|f(\alpha)| = M$.
2. Montrer que pour tout $x \in [0,1]$, $|f'(x)| \leqslant M'' \cdot \min(x, |x-\alpha|)$.
3. En déduire que $|f(\alpha)| \leqslant M'' \cdot \min\left(\frac{\alpha^2}{4}, \frac{(1-\alpha)^2}{2}\right)$.
4. En déduire que $M \leqslant \left(\frac{3}{2}-\sqrt{2}\right)\cdot M''$
5. On suppose de plus que $f'(1) = 0$. Montrer que $M \leqslant \frac{1}{16}\cdot M''$.

Exercice 22 – **(Polynômes de Laguerre)** – Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ continue sur $\mathbb{R}_+$, dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

1. Soit $a \in \mathbb{R}_+$. On suppose que $f(a) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Montrer qu'il existe $c > a$ tel que $f'(c) = 0$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$, et soit g définie sur $\mathbb{R}_+$ par $g(x) = x^n \mathrm{e}^{-x}$. Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^\infty$.
3. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, calculer $g^{(k)}(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g^{(k)}(x)$.
4. Soit $1 \leqslant k < n$. Montrer que $g^{(k)}$ s'annule en au moins k points de $\mathbb{R}_+$.
5. On pose $L_k(x) = \mathrm{e}^x g^{(k)}(x)$. Calculer L_1 et L_2. Montrer que L_k est un polynôme de degré n à coefficients entiers. Ces polynômes sont appelés *polynômes de Laguerre*.

Exercice 23 – Étudier aussi précisément que possible les fonctions suivantes sur leur domaine de définition (à préciser). On étudiera notamment les points d'inflexion, les propriétés de convexité, et l'existence éventuelle de droites ou de paraboles asymptotes.

a) $f(x) = \dfrac{1}{3}(x^4 - 6x^2 + 8x - 2)$	*b)* $f(x) = (x-1)(x-2)\mathrm{e}^{-x}$
c) $f(x) = \dfrac{x\sqrt{x}}{1+x}$	*d)* $f(x) = \dfrac{x^2}{1+x^4}$
e) $f(x) = \dfrac{x^3}{1+x^3}$	*f)* $f(x) = \dfrac{\mathrm{Arctan}(x)}{1+x^2}$
g) $f(x) = x + \sin x$	*h)* $f(x) = (x+\sin x)\mathrm{e}^x$

Convexité

Exercice 24 – (Comparaison des moyennes arithmétiques et géométriques)

1. En considérant l'application f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = -\ln x$, montrer que pour tout $(x_1,\dots,x_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$,
$$\sqrt[n]{x_1\cdots x_n} \leqslant \frac{x_1+\cdots+x_n}{n}.$$
2. (a) Montrer par récurrence sur n que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\ln(n!) \geqslant n \ln \frac{n}{\mathrm{e}}$.

   (b) En déduire que pour tout $(x_1,\dots,x_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$,
$$\sqrt[n]{\prod_{i=1}^n x_k} \leqslant \frac{\mathrm{e}}{n^2}\sum_{k=1}^n kx_k.$$

Exercice 25 – Soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ une fonction convexe.

1. Montrer que $x \mapsto \frac{f(x)}{x}$ admet une limite (finie ou $+\infty$) lorsque x tend vers $+\infty$.
2. Montrer que si cette limite ℓ est finie, alors $x \mapsto f(x) - \ell x$ tend vers une limite finie ou $-\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$ (On pourra considérer l'application $x \mapsto \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$.)

Exercice 26 – Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe et majorée. Montrer que f est constante. Est-ce encore vrai si f est définie sur $\mathbb{R}_+$?

Exercice 27 –

1. Soient $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux applications convexes ; on suppose que g est croissante. Montrer que $g \circ f$ est convexe.
2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ une application. Montrer que si $\ln \circ f$ est convexe, alors f est convexe.

Exercice 28 –

1. Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln(1+\mathrm{e}^x)$ est convexe sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et tout $(x_1,\dots,x_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$,
$$1 + \left(\prod_{k=1}^n x_k\right)^{\frac{1}{n}} \leqslant \left(\prod_{k=1}^n (1+x_k)\right)^{\frac{1}{n}}$$
3. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et tous $(a_1,\dots,a_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$, $(b_1,\dots,b_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$, :
$$\left(\prod_{k=1}^n (a_k+b_k)\right)^{\frac{1}{n}} \geqslant \left(\prod_{k=1}^n a_k\right)^{\frac{1}{n}} + \left(\prod_{k=1}^n b_k\right)^{\frac{1}{n}}$$