## Analyse 7 – Fonctions de plusieurs variables : calcul différentiel

**Exercice 1** – Domaine de définition et existence d'une limite en $(0,0)$ des fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définies par :

$a)$ $f(x,y) = \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$ $\quad b)$ $f(x,y) = \dfrac{(1+x^2+y^2)\sin y}{y}$ $\quad c)$ $f(x,y) = \dfrac{xy}{x+y}$

$d)$ $f(x,y) = \dfrac{\sin x - \mathrm{sh} y}{\mathrm{sh} x - \sin y}$ $\quad e)$ $f(x,y) = x^y$ $\quad f)$ $f(x,y) = \dfrac{x^a y^b}{x^c + y^d}$

$g)$ $f(x,y) = \dfrac{(x+y)^2}{x^2+y^2}$ $\quad h)$ $f(x,y) = x \sin\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$ $\quad i)$ $f(x,y) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \sin\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$

**Exercice 2** – Étudier la continuité des fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ci-dessous. Étudier l'existence des dérivées partielles et le caractère $\mathcal{C}^1$.

$a)$ $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3-y^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0); \end{cases}$ $\quad b)$ $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x\sin y - y \sin x}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0); \end{cases}$

$c)$ $f(x,y) = \begin{cases} x^2 & \text{si } |x| > y \\ y^2 & \text{si } |x| \leqslant y; \end{cases}$ $\quad d)$ $f(x,y) = \begin{cases} y^2 \sin \dfrac{x}{y} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0); \end{cases}$

$e)$ $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{|x|+|y|} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0); \end{cases}$ $\quad f)$ $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x+y} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0); \end{cases}$

**Exercice 3** – Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$, et $F = \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par :

$$F(x,y,z) = f(x-y, y-z, z-x).$$

Calculer $\dfrac{\partial F}{\partial x} + \dfrac{\partial F}{\partial y} + \dfrac{\partial F}{\partial z}$.

**Exercice 4** – Soit $f$ et $g$ deux fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ sur un ouvert $\Omega$ de $\mathbb{R}^n$. Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 et 2 de $fg$ en fonction des dérivées partielles de $f$ et de $g$.

**Exercice 5** – Soient $f, u, v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ des fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ et $g$ définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad g(x,y) = f(u(x,y), v(x,y)).$$

Déterminer les dérivées partielles premières et secondes de $g$ en fonction de celles de $f$, $u$ et $v$.



**Exercice 6** – Montrer que la fonction $X \mapsto \frac{X}{\|X\|^2}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert $\mathbb{R}^n \setminus \{0_{\mathbb{R}^n}\}$. Déterminer son développement limité d'ordre 1 au voisinage de $X_0$.

**Exercice 7** – Soit $f$ la fonction définie par : $f(x) = \begin{cases} 2y & \text{si } x \geqslant y^2 \\ \dfrac{2x}{y} & \text{si } |x| \leqslant y^2 \text{ et } y \neq 0 \\ -2y & \text{si } x \leqslant -y^2. \end{cases}$

1. Montrer que $f$ est continue sur $\mathbb{R}^2$.
2. Montrer qu'il n'existe aucun $(A, \alpha, \beta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ tel que :

$$\forall (x, x', y) \in ]-\alpha, \alpha[ \times ]-a, a[ \times ]-\beta, \beta[, \quad |f(x,y) - f(x',y)| \leqslant A|x - x'|.$$

**Exercice 8** – Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on définit $f_{x,y} : [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ par $f_{x,y}(t) = xt^2 + yt$, et on note :

$$F(x,y) = \sup_{t \in [-1,1]} f_{x,y}(t).$$

1. Calculer $F(x,y)$.
2. Étudier la continuité de $F$ sur $\mathbb{R}^2$.

**Exercice 9** – Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $C^2$, et $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par : $g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{f(x) - f(y)}{x - y} & \text{si } x \neq y \\ f'(x) & \text{si } x = y. \end{cases}$

Le but de l'exercice est de montrer que $g$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que la limite de $g$ lorsque $(x,y)$ tend vers $(x_0, x_0)$, avec $x \neq y$, est $f'(x_0)$ (ind. : TAF).
   En déduire que $g$ est continue sur $\mathbb{R}^2$.
2. Pour $h \in \mathbb{R}^*$, exprimer $\dfrac{g(x_0+h, x_0) - g(x_0, x_0)}{h}$ en fonction de $f$.
   Déterminer la limite de cette expression à l'aide d'une formule du cours.
3. Pour $x \neq y$ calculer $\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y)$ en fonction de $(x,y)$, et déterminer sa limite.
   En déduire que $g$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

**Exercice 10** – Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert convexe $\Omega$ de $\mathbb{R}^n$.

1. On suppose que, pour tout $X \in \Omega$, $\nabla f_X = 0$. Montrer que $f$ est constante.
2. On suppose que l'application $X \mapsto \nabla f_X$ est constante sur $\Omega$. Montrer que $f$ est affine, c'est-à-dire qu'il existe un réel $b$ tel $f - b$ soit une forme linéaire. On remarquera que $b$ est forcément égal à $f(0)$.

**Exercice 11** – Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ sur un ouvert $\Omega$ de $\mathbb{R}^n$. On pose $\Delta f = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial {x_i}^2}$.

Montrer que si $u, v : \Omega \to \mathbb{R}$ sont deux fonctions de classe $\mathcal{C}^2$, on a

$$\Delta(uv) = u\Delta v + 2\langle \nabla u, \nabla v \rangle + v \Delta u.$$

**Exercice 12** – Soit $U$ un ouvert de $\mathbb{R}^2$, et $f : U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$. On appelle laplacien de $f$ la fonction
$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$
On dit que $f$ est *harmonique* si $\Delta f = 0$.

1. Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, soit $z = x + iy$, et $f(x, y) = \ln |e^{ze^{-z}}|$. Montrer que $f$ est harmonique sur $\mathbb{R}^2$.
2. Soit $f$ une fonction de classe $\mathcal{C}^3$, harmonique sur $U$. Montrer que $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ et $y\frac{\partial f}{\partial x} + x\frac{\partial f}{\partial y}$ sont harmoniques.
3. Montrer que la fonction définie par $f(x, y) = \operatorname{Arctan} \frac{x}{y}$ est harmonique sur $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$.

**Exercice 13** – Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par : $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$

Comparer $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)$. Les dérivées partielles secondes $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ sont-elles continues ?

**Exercice 14** – Plan tangent en $(0, 0)$ des fonctions suivantes (éventuellement prolongées par continuité) :

1. $f(x, y) = 1 + x - \sqrt{1 + x - y}$
2. $f(x, y) = \dfrac{1}{\sqrt{2 + x + \ln(1 + y)}}$.
3. $f(x, y) = \dfrac{1}{\sqrt{1 + \cos(x + y)}}$.
4. $f(x, y) = \dfrac{\sin(x + y) - \sin x - \sin y}{xy}$.

**Exercice 15** – Développement limité à l'ordre 2 en $A$ des fonctions suivantes définies sur $\mathbb{R}^2$ :

1. $f(x, y) = \sin(x + 2y)$, $A = (0, 0)$
2. $f(x, y) = \frac{1}{1+x^2+y^2}$, $A = (0, 0)$

1. $f(x, y) = e^{-x^2-y^2} \cos(xy)$, $A = (0, 0)$
2. $f(x, y) = e^{x^2} \cos y$, $A = (1, 0)$

**Exercice 16** – Déterminer les fonctions $f : D \to \mathbb{R}$, où $D$ est un ouvert à déterminer, vérifiant :

1. $\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= \frac{2 + x}{y} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= \frac{2 + y}{x} \end{cases}$
2. $\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= \frac{y^2}{(x + y)^2} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= \frac{x^2}{(x + y)^2} \end{cases}$

**Exercice 17** – **Formule de Taylor-Young**

1. Montrer par récurrence sur $n$ la formule de Taylor-Young à l'ordre $n$ pour les fonctions de deux variables : si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^n$ au voisinage de $(0, 0)$, alors :
$$f(X) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{i+j=k} \frac{x^i y^j}{i!j!} \cdot \frac{\partial^k f}{\partial x^i \partial y^j} + o(\|X\|^n), \qquad \text{où } X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$



2. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ admettant un développement limité à l'ordre $n$ au voisinage de $(0, 0)$. Montrer que ce développement est unique.
3. Déterminer avec un minimum de calculs les dérivées partielles successives d'ordre inférieur ou égal à 15 de $f$ définie par $f(x, y) = \operatorname{Arctan}(x^2 y)$.

**Exercice 18** – Soit $a$ un réel strictement positif. On note $I = ]-a, a[$. On considère une application $f : I^2 \to I$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I$. On suppose qu'il existe un réel $k \in [0, 1[$ tel que pour tout $(x, y) \in I^2$,
$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\right| + \left|\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right| \leqslant k.$$

1. Soient $(x, y)$ et $(x', y')$ deux couples de $I^2$. En utilisant la formule des accroissements finis, montrer que
$$|f(x, y) - f(x', y')| \leqslant k \max(|x - x'|, |y - y'|).$$
2. Soient $(\alpha, \beta) \in I^2$ et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite définie par :
$$u_0 = \alpha, \ u_1 = \beta \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \ u_{n+2} = f(u_{n+1}, u_n).$$
Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = \max(|u_{n+2} - u_{n+1}|, |u_{n+1} - u_n|)$.
   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} \leqslant k a_n$.
   (b) Montrer que la série $\sum a_n$ est convergente.
   (c) Montrer que la suite $(u_n)$ est convergente.
3. Montrer que la limite $(u_n)$ est indépendante du couple $(\alpha, \beta)$.

**Exercice 19** – On considère l'équation différentielle (E) :
$$x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0,$$
où l'inconnue $f$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.

1. Si $f$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, on définit $g : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par :
$$g(u, v) = f(u, uv).$$
Justifier l'existence de $\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}$. La calculer.
2. En déduire que $f$ est solution de (E) si et seulement si $\frac{\partial g}{\partial u} = 0$.
Montrer qu'il en est ainsi si et seulement s'il existe deux fonctions $k$ et $\ell$ de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ telles que
$$\forall (u, v) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, \quad g(u, v) = uk(v) + \ell(v).$$
3. En déduire les solutions de (E).