Analyse 8 – Optimisation

Exercice 1 – Les fonctions suivantes admettent-elle un extremum (local ou global) sur D ?
- $D = \mathbb{R}_+^* \times]0,1[$, $f : (x,y) \mapsto x^4 - 2x\ln y + \mathrm{Arctan}(xy)$
- $D =]2,+\infty[^2$, $f : (x,y) \mapsto \sqrt{xy} - \mathrm{Arctan}(xy^2)$.

Exercice 2 – Étudier les extrema globaux des fonctions suivantes, définies sur D :
1. $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, $f(x,y) = (x^2+y^2)^\alpha \ln(x^2+y^2)$, $\alpha \in \mathbb{R}$.
2. $D = \mathbb{R}^3$, $f(x,y,z) = \mathrm{Arctan}((x+y+z)\mathrm{e}^{-(x+y+z)}$
3. $D = B(0,1) \subset \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = \frac{2+x-y^2}{1-x+y^2}$
4. $D = \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = x^2 - 4xy + 5y^2 - 2x - 6y + 2$
5. $D = \mathbb{R}^3$, $f(x,y,z) = x^2 + 2xy + 2yz + z^2 + 1$
6. $D = \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = -x^2 - 2xy - 3y^2 - 4$

Exercice 3 – Étudier les extrema des fonctions suivantes, définies sur D :
1. $D = \mathbb{R}^3$, $f : (x,y,z) \mapsto x^2 + y^2 + z^2 - 2xyz$.
2. $D =]0,\pi[^2$, $f : (x,y) \mapsto \sin x + \sin y + \cos(x+y)$
3. $D = \mathbb{R}^3$, $f : (x,y,z) \mapsto (x+z^2)\mathrm{e}^{x(y^2+z^2+1)}$.
4. $D = [0,1]^2$, $f : (x,y) \mapsto x^3 - 2x^2y + y^2$
5. D est le triangle (fermé) de sommets $(0,1)$, $(1,2)$, $(2,1)$, $f : (x,y) \mapsto 3x^3 - x^2 + 2xy + xy^2$.
6. $D = [-1,1]^3$, $f : (x,y,z) \mapsto x^n + y^n + z^n$, $n \in \mathbb{N}^*$
7. $D = [0,1]^3$, $f : (x,y,z) \mapsto xy^2 + x^2y - 2y^2 - x + 1$.

Exercice 4 – Soit f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = x^2 + y^2 + 2xy + xy^3$.
1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$, et déterminer son gradient.
2. Déterminer les points critiques de f.
3. Déterminer la hessienne de f en tout point (x,y).
4. Montrer que la forme quadratique associée $q_{(0,0)}$ au point $(0,0)$ est positive.
5. La fonction f admet-elle un extremum en $(0,0)$?

Exercice 5 – Soit g définie sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$ par $g(x,y) = x\ln y - y\ln x$.
1. Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^\infty$.
2. Déterminer le gradient et la hessienne de g en tout point.
3. Étudier l'existence d'extremums locaux ou globaux de g.

Exercice 6 – Démontrer que la fonction f définie sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$ par $f(x,y) = \dfrac{xy}{(1+x)(1+y)(x+y)}$ a un unique extremum, et que c'est un extremum global.

Exercice 7 – Dans un plan rapporté à un repère orthonormal, on considère les courbes C_1 et C_2 d'équations respectives $y = x^2$ et $y = x - 2$. Calculer la distance entre C_1 et C_2, c'est-à-dire

$$\min\{d(M,N), M \in C_1, N \in C_2\}.$$

Exercice 8 – Extrema locaux de f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = 3xy^2 + x^3 - y^3$.

Exercice 9 – Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y,z) = xy + yz + zx - xyz$.
1. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^2$, puis déterminer les points critiques de f
2. Déterminer la hessienne de f en tout point X de $\mathbb{R}^3$.
3. Étudier les éventuels extremums de f.

Exercice 10 – On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^3$ par $f(x,y,z) = (y-z)^2 + y^3x^2$, et on définie la fonction g sur $\mathbb{R}^2$ par $g(x,y) = f(x,y,1)$.
1. Montrer que g admet un unique extremum local dont on précisera la nature. cet extremum est-il global ?
2. Déterminer les points critiques de f ainsi qu'en chacun de ces points le développement limité de f à l'ordre 2. En déduire les extremums de f. Sont-ils globaux ?

Exercice 11 – Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^3$ par $f(x,y,z) = yz\mathrm{e}^x + zx\mathrm{e}^y + xy\mathrm{e}^z$.
1. Montrer que les points critiques de f sont $(0,0,0)$ et $(-2,-2,-2)$.
2. Étudier le signe de $f(x,y,0)$. La fonction f admet-elle un minimum en $(0,0,0)$?
3. Montrer que quand h tend vers 0, on a :

$$f(-2+h,-2+h,-2+h) = f(-2,-2,-2) - 3\mathrm{e}^{-2}h^2 + o(h^2)$$

$$\text{et} \qquad f(-2+h,-2,-2) = f(-2,-2,-2) + 2\mathrm{e}^{-2}h^2 + o(h^2).$$

La fonction f admet-elle un extremum en $(-2,-2,-2)$?

Exercice 12 – Soit f la fonction définie sur $D = (\mathbb{R}_+^*)^2$ par :

$$f(x,y) = \mathrm{e}^{x^2+y^2} - \ln x - \ln y.$$

1. Justifier que l'équation $ze^z = 1$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}_+^*$.
2. Montrer que f admet sur Δ un unique point critique $A = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, et que a et b vérifient $a = b$. On ne demande pas de déterminer a et b.
3. Déterminer la hessienne $\nabla^2 f(x,y)$ en tout $(x,y) \in D$, et déterminer, pour tout $(x,y) \in D$ et tout $(u,v) \in \mathbb{R}^2$, le signe de la forme quadratique associée au point (x,y), évaluée en (u,v), c'est-à-dire $q_{(x,y)}(u,v)$.
4. Justifier que la courbe de f présente au point A un minimum global.

Exercice 13 – Soit $f : (\mathbb{R}^*)^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f : x^2y\ln(x^2y^2)$.
1. Déterminer les éventuels points critiques de f. La fonction f admet-elle des extremums locaux ? globaux ?
2. Déterminer les éventuels extremums de f sous la contrainte $y = ax$, $a \in \mathbb{R}^*$.

Exercice 14 – Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par : $f(x,y,z) = x^2 - 2xy + yz + y - z$.

1. Déterminer les points critiques de f, les extremums, les points-selles.
2. Déterminer les points critiques et les extremums sous la contrainte $\begin{cases} 2x - y &= 1 \\ x + z &= 1. \end{cases}$

Exercice 15 – Déterminer les extremums de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y) = 5x^2 + 4y^2 - \sqrt{3}xy,$$

lorsque (x,y) est soumis aux contraintes $x^2 + y^2 = 1$ et $y \geqslant 0$.

Exercice 16 – Soit $f : \mathbb{R}_n^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^n x_i$, $s \in \mathbb{R}_+^*$, et $\mathcal{C}$ le plan d'équation $g(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_i = s$.

1. Déterminer les extremums de f sous la contrainte $\mathcal{C}$.
2. En déduire que pour tout $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}_+^n$, $\left(\prod_{i=1}^n\right)^{\frac{1}{n}} \leqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i$.

Exercice 17 – **(Généralisation de l'exercice précédent)**
Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ des réels strictement positifs tels que $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$. On considère les fonctions f et g définies par $f(x_1, \ldots x_n) = \prod_{i=1}^n x_i^{\alpha_i}$ et $g(x_1, \ldots x_n) = \alpha_i x_i$.
On pose $\Gamma = \{(x_1, \ldots, x_n) \in (\mathbb{R}_+)^n \mid g(x_1, \ldots, x_n) = 1\}$.

1. Montrer que f possède un maximum M sur Γ et que celui-ci est atteint sur $\Gamma \cap (\mathbb{R}_+^*)^n$.
2. Déterminer les points critiques de f sur $(\mathbb{R}_+^*)^n$ sous la contrainte $g(x_1, \ldots, x_n) = 1$. Montrer que $M = f(1, \ldots, 1) = 1$.
3. En déduire que : $\forall (x_1, \ldots, x_n) \in (\mathbb{R}_+)^*$, $\prod_{i=1}^n x_i^{\alpha_i} \leqslant \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i$.

Exercice 18 – Soit n un entier supérieur ou égal à 2, et f la fonction définie sur $(\mathbb{R}_+^*)^n$ par

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{k=1}^n x_k^4.$$

Minimiser f sous la contrainte $x_1 + \cdots + x_n = n$.

Exercice 19 – Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $u_1 < \cdots < u_n$ des réels, $\overline{u} \in \mathbb{R}$, et f la fonction définie sur $(\mathbb{R}_+^*)^n$ par :

$$f(p_1, \ldots, p_n) = -\sum_{i=1}^n p_i \ln p_i.$$

1. Montrer que f possède un point critique sous la contrainte $\left(\sum_{i=1}^n p_i = 1 \text{ et } \sum_{i=1}^n p_i u_i = \overline{u},\right)$ si et seulement si $\overline{u} \in]u_1, u_n[$. Montrer qu'alors ce points critique est unique.
2. Démontrer que ce point critique correspond à un maximum sous contrainte.

Exercice 20 – Déterminer la position du graphe de f définie sur D, par rapport au plan tangent au voisinage des points critiques, dans les cas suivants :

1. $D = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, $f : (x,y) \mapsto x\left((\ln x)^2 + y^2\right)$
2. $D = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[^2$, $f : (x,y) \mapsto x^2y^3(1 + 3x + 2y)$

Exercice 21 –

1. On note Δ l'ensemble $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geqslant 0, y \geqslant 0, -2x + y + 1 \geqslant 0, x - 2y + 1 \geqslant 0\}$, et g la fonction définie sur Δ par :
$$g(x,y) = 3x - y + 4.$$
   (a) Déterminer graphiquement Δ
   (b) Montrer que Δ est une partie fermée et bornée de $\mathbb{R}^2$.
   (c) Montrer que g admet un maximum sur Δ.
   (d) Ce maximum peut-il être atteint en un point de l'ensemble Δ', défini par :
$$\Delta' = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, y > 0, -2x + y + 1 > 0, x - 2y + 1 > 0\}?$$
   (e) Déterminer l'ensemble des points de Δ où ce maximum est atteint.
2. Dans cette question, on identifiera $\mathbb{R}^4$ et $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, et la matrice colonne $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. On note $\mathcal{C}$ l'ensemble
$$\mathcal{C} = \left\{ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in (\mathbb{R}_+)^4 \middle| AX = B \right\}.$$
   (a) Montrer que $X \in \mathcal{C}$ si et seulement si ses coordonnées satisfont :
$$(x_1, x_2) \in \Delta, \quad x_3 = -2x_1 + x_2 + 1, \quad x_4 = x_1 - 2x_2 + 1.$$
   (b) On considère $W = (2,1,4,3) \in \mathbb{R}^4$, et la fonction f définie sur $\mathcal{C}$ par $f(X) = \langle X, W \rangle$.
   Montre que pour tout élément X de $\mathcal{C}$, $f(X) = g(x_1, x_2)$
   Déterminer l'ensemble des points en lesquels f atteint son maximum sur $\mathcal{C}$.

Exercice 22 – On considère la fonction f de deux variables définie par :

$$f(x,y) = xy\sqrt{1 - x^2 - 2y^2}.$$

1. Déterminer l'ensemble de définition D de f.
2. Montrer que l'ensemble des solutions de l'équation $f(x,y) = 0$ est la réunion de deux segments et d'une courbe C que l'on précisera.
3. Montrer que D est un fermé borné de $\mathbb{R}^2$, et que $D \setminus C$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
4. Étudier les extremums de f sur D.
   Indication : On pourra montrer que f admet un minimum et un maximum, et qu'il suffit de s'intéresser aux points de l'ouvert $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, y > 0, x^2 + 2y^2 < 1\}$.